


20-12-37

PRIX 18 francs



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

520

STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

Exposés publiés sous la direction de

GEORGES DARMOIS

Professeur à la Sorbonne

II

LA DURÉE EXTRÊME DE LA VIE HUMAINE

PAR

E. J. GUMBEL

Faculté des Sciences, Lyon



PARIS

HERMANN ET C^{ie}, ÉDITEURS

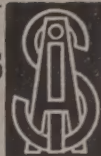
6, Rue de la Sorbonne, 6

—
1937





ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES



PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

René AUDUBERT

Directeur de Laboratoire à l'Ecole
des Hautes Etudes

ÉLECTROCHIMIE THÉORIQUE

J.-P. BECQUEREL

Professeur au Muséum d'Histoire Naturelle

OPTIQUE ET MAGNÉTISME AUX TRÈS BASSES TEMPÉRATURES

G. BERTRAND

Membre de l'Institut
Professeur à l'Institut Pasteur

CHIMIE BIOLOGIQUE

L. BLARINGHEM

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

BIOLOGIE VÉGÉTALE

Georges BOHN

Professeur à la Faculté des Sciences

ZOOLOGIE EXPÉRIMENTALE

J. BORDET

Prix Nobel

Directeur de l'Institut Pasteur de Bruxelles

MICROBIOLOGIE

J. BOSLER

Directeur de l'Observatoire de Marseille

ASTROPHYSIQUE

Léon BRILLOUIN

Professeur au Collège de France

THÉORIE DES QUANTA

Louis de BROGLIE

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique

I. PHYSIQUE THÉORIQUE

II. PHILOSOPHIE DES SCIENCES

Maurice de BROGLIE

de l'Académie Française
et de l'Académie des Sciences

PHYSIQUE ATOMIQUE EXPÉRIMENTALE

D. CABRERA

Directeur de l'Institut de Physique et Chimie
de Madrid

EXPOSÉS SUR LA THÉORIE DE LA MATIÈRE

E. CARTAN

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

GÉOMÉTRIE

M. CAULLERY

Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences

BIOLOGIE GÉNÉRALE

L. CAYEUX

Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

GÉOLOGIE

(Roches sédimentaires)

A. COTTON

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

MAGNÉTO-OPTIQUE

Mme Pierre CURIE

Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique
Prix Nobel de Chimie

RADIOACTIVITÉ

ET PHYSIQUE NUCLÉAIRE

Véra DANTCHAKOFF

Ancien professeur à l'Université Columbia
(New-York)

Organisateur de l'Institut
de Morphogenèse Expérimentale
(Moscou Ostankino)

LA CELLULE GERMINALE DANS L'ONTOGENÈSE et L'ÉVOLUTION

E. DARMOIS

Professeur à la Sorbonne

CHIMIE-PHYSIQUE

K. K. DARROW

Bell Telephone Laboratories

CONDUCTIBILITÉ DANS LES GAZ

Arnaud DENJOY

Professeur à la Sorbonne

THÉORIE DES FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE

J. DUESBERG

Recteur de l'Université de Liège

BIOLOGIE GÉNÉRALE EN RAPPORT AVEC LA CYTOLOGIE

F. ENRIQUES

De l'Académie *Dei Lincei*
Professeur à l'Université de Rome

PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE

CATALOGUE SPÉCIAL SUR DEMANDE

B-S. Mahara Py

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

520

STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

Exposés publiés sous la direction de

GEORGES DARMOIS

Professeur à la Sorbonne

II

LA DURÉE EXTRÊME DE LA VIE HUMAINE

PAR

E. J. GUMBEL

Faculté des Sciences, Lyon



PARIS

HERMANN ET C^{ie}, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—
1937

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

COPYRIGHT 1937 BY LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN ET C^{ie}
PARIS,



I

PROBLÈME ET MÉTHODE

LA durée extrême de la vie humaine a, de tout temps, intéressé les hommes pour des raisons bien compréhensibles. Pourtant la science s'en est peu occupée. Cela aussi est compréhensible puisqu'elle se ramène finalement à une question individuelle. Or, la science tend de plus en plus à se vouer au collectif. Il convient donc de se demander : peut-on traiter le problème par des méthodes statistiques ? Ce point de vue relie notre question aux tables de mortalité.

Les observations nous montrent des âges plus élevés que 100 ans. Mais les données statistiques ne nous permettent guère de poursuivre les tables au delà de cet âge. Par suite, on est forcé d'émettre une hypothèse préliminaire sur le cours de la mortalité vers les âges élevés.

Si l'on considère les fonctions biométriques comme pouvant être discontinues, une limite bien déterminée de la vie humaine peut exister. Cet âge serait défini par le fait que la probabilité de mourir dans l'intervalle d'un an est égale à un. Mais d'après l'opinion habituelle, ces fonctions sont continues. Même dans ce cas, un âge limite fixe serait possible, la fonction de survie étant zéro pour cet âge et non définie pour des âges supérieurs. La durée extrême de la vie humaine serait une des constantes qui existeraient dans les fonctions biométriques, indépendantes du

nombre des observations. Mais sa détermination serait liée à une hypothèse analytique spéciale sur l'accroissement de la mortalité avec l'âge. De telles hypothèses ont été émises par exemple par A. de Moivre et Th. Wittstein.

La plupart des livres sur la théorie des assurances considèrent la table de survie comme discontinue en un certain point. Mais cette théorie conduit, comme Steffensen l'a prouvé, aux plus grandes difficultés du point de vue logique. Car pour une augmentation suffisante du nombre d'observations, on pourrait rendre la discontinuité, dans la distribution des vivants d'après les âges, aussi grande que l'on veut.

Pour éviter cette difficulté nous introduirons l'idée plus simple, que la fonction de survie est partout continue et ne s'approche de zéro que d'une façon asymptotique. Partant de cette hypothèse, nous allons exposer une méthode basée sur la théorie des probabilités pour définir le dernier âge correspondant à un nombre déterminé d'observations. Les seules valeurs numériques que nous utiliserons pour le calcul seront celles qui se rattachent à un âge dit normal, situé vers 75 ans, pour lequel on peut considérer les valeurs biométriques comme assez certaines. Cette méthode n'est pas liée à une seule formule représentant le cours de la mortalité avec les âges.

Notre point de départ est l'étude de la distribution des décès suivant les âges (16) ⁽¹⁾, supposée illimitée vers la droite. Alors la question de l'âge le plus élevé prend un aspect nouveau. Chercher un âge limite fixe est dépourvu de sens. Son existence n'est pas reconnue et sa détermination à l'aide de conditions analytiques ou d'après des valeurs déterminées des fonctions biométriques peut être regardée comme artificielle.

Mais cette notion ne disparaît pourtant pas. Elle doit être envisagée simplement d'une façon nouvelle. Il faut distinguer entre le dernier âge et le plus grand âge. Celui-ci devient une variable statistique relative à un nombre d'observations déterminé et dont la distribution dépendra de ce nombre. Nous introduisons la forme dite finale, vers laquelle elle tend quand le nombre d'observations augmente. On pourra donner une idée du plus grand âge

(1) Dans la suite, comme ici un tel numéro désigne un travail de l'auteur cité dans la bibliographie.

par les moyennes de cette distribution, qu'on distinguera entre elles par des désignations choisies. L'espérance mathématique de cette distribution, fonction du nombre d'observations, sera considérée comme l'âge limite, tandis que la valeur la plus probable est considérée comme dernier âge. Puisque ces valeurs augmenteront avec les observations, la difficulté relevée par Steffensen est écartée.

Nous sommes parvenus à cette méthode en traitant successivement les différentes difficultés qui s'élevaient. D'abord nous avons étudié les propriétés analytiques de deux fonctions de survie remarquables, à savoir celle de Lexis (1-4) et celle de Gompertz (5). Puis nous avons établi le principe du calcul du dernier âge (6), commençant d'abord par la distribution de Lexis (7, 8) en basant le calcul de l'écart type sur une hypothèse spéciale. Nous avons ensuite écarté cette supposition en recherchant la forme finale de la distribution de la plus grande valeur (9), ce qui permet le calcul exact de l'écart type (10) et la comparaison de cette distribution avec les observations (11). Enfin nous avons fait un travail analogue pour la formule de Gompertz (13 et 14), où nous nous sommes contentés d'une première approximation.

D'ailleurs cette méthode permet maintes autres applications. En effet, c'est d'après elle que nous avons étudié la distribution des inondations (19) et celle des distances extrêmes entre les émissions radioactives (20).

Le but des lignes suivantes est d'établir un travail indépendant qui évite les détours qu'on fait nécessairement quand on s'avance à tâtons sur une nouvelle route. Notre manière de calculer la durée extrême de la vie humaine n'est qu'un cas spécial de la recherche portant sur la plus grande valeur d'une distribution illimitée correspondant à un nombre donné d'observations, question que nous avons traitée dans un travail précédent (15). Nous devons donc commencer par écrire ces résultats avec les notations biométriques. Cela nécessite quelques mots sur les tables de mortalité.

II

TABLES DE MORTALITÉ

Dans ce qui suit, la densité de probabilité d'une variable statistique continue x est appelée *la distribution*. La valeur dont la densité de probabilité est maxima est appelée *la dominante*. La racine de la moyenne arithmétique des carrés des écarts est désignée par *écart type*.

Dans une table de mortalité considérée comme distribution, la variable statistique est l'âge x au décès, grandeur toujours positive, puisqu'on exclut les mort-nés pour lesquels elle serait nulle. Soit $\theta(x)$ la *distribution* des décès suivant les âges, ou *densité* de mortalité, de sorte que $\theta(x)dx$ est la probabilité d'un nouveau-né de mourir entre les âges x et $x + dx$. Nous supposons cette distribution illimitée, condition qui est fondamentale à notre point de vue. Alors la probabilité d'un décès après l'âge x est

$$l(x) = \int_x^{\infty} \theta(z)dz \quad (1)$$

Cette probabilité pour un nouveau-né d'atteindre l'âge x , qu'on appelle aussi *fonction de survie*, diminue toujours avec l'âge. La condition de l'aire, usuelle pour les distributions, exige $l(0) = 1$. Les différences successives $l(x) - l(x + 1) = D(x)$ sont appelées les *décédés d'une année d'âge x* , quoiqu'il s'agisse naturellement de nombres fractionnaires. Les observations fournissent seulement les intégrales

$$D(x) = \int_x^{x+1} \theta(z)dz \quad (2)$$

Soit $\mu(x)dx$ la probabilité pour une tête d'âge x de mourir dans l'intervalle $x, x + dx$. On appelle $\mu(x)$ le taux instantané de mortalité ou l'*intensité de mortalité* et on a

$$\mu(x) = \frac{\theta(x)}{l(x)} \quad (3)$$

Les calculs approchés montrent qu'à partir d'un certain âge l'intensité de mortalité augmente avec l'âge. L'opinion usuelle est, qu'elle augmente sans limite. L'idée d'Insolera, d'après laquelle

$$\mu(x) \rightarrow 1$$

se heurte au fait que l'intensité de mortalité a la dimension inverse d'un âge (Voir la polémique de Finetti et de Franchis). Ces auteurs se contentent d'affirmer que $\mu(x)$ ne diminue pas pour les âges très élevés. Les observations rares ne permettent pas encore de décider cette question de fait. Puisque, d'après (1) et (3)

$$\frac{d \lg l(x)}{dx} = -\mu(x)$$

on aura, en choisissant un âge quelconque x_0 , la relation

$$l(x) = l(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \mu(z)dz} \quad (4)$$

entre la fonction de survie et l'intensité de mortalité. L'inverse, $1/\mu(x)$ sera appelé *force de vie*. C'est un nombre d'années.

Enfin on définit comme *espérance de vie* $e(x)$ l'écart moyen entre les âges au décès z supérieur à x et cet âge x . On aura donc

$$e(x) = \frac{\int_x^\infty (z-x)\theta(z)dz}{\int_x^\infty \theta(z)dz} \quad (5)$$

ce qui devient d'après (1)

$$e(x) = \frac{\int_x^\infty l(z)dz}{l(x)} \quad (6)$$

L'espérance de vie est donc la valeur moyenne du temps qui reste à vivre à une tête d'âge x . Du point de vue des dimensions on aura

$$[\mu(x)] = \frac{1}{[e(x)]} \quad (3')$$

On écrit pour le numérateur de (6)

$$\int_x^\infty l(z)dz = T(x) \quad (7)$$

Les fonctions $\theta(x)$, $l(x)$, $\mu(x)$, $e(x)$, $T(x)$ sont dénommées *biométriques*. Une des principales caractéristiques d'une table de mortalité

est l'espérance de vie d'un nouveau-né ou l'âge probable au décès

$$e(0) = \int_0^{\infty} l(z) dz \quad (6')$$

Sa valeur inverse est le taux de mortalité dans une population stationnaire. Il nous sera nécessaire de traiter encore quelques valeurs biométriques, qui ont été introduites par Lexis et Bortkiewicz (1). La dominante ξ de la distribution des décès est appelée l'âge normal et caractérisée par

$$\theta'(\xi) = 0; \theta''(\xi) < 0.$$

Exprimons les dérivées de la densité par celles de l'intensité et nous aurons, d'après (3)

$$\theta'(x) = l(x) (\mu'(x) - \mu^2(x)) \quad (8)$$

$$\theta''(x) = l(x) (\mu^3(x) - 3\mu(x)\mu'(x) + \mu''(x)) \quad (9)$$

Donc les conditions de l'âge normal sont

$$\mu'(\xi) = \mu^2(\xi) \quad (8')$$

$$\mu''(\xi) < 2\mu^3(\xi) \quad (9')$$

La probabilité $l(\xi)$ d'atteindre l'âge normal sera appelée *probabilité normale*.

L'espérance de vie à l'âge normal $e(\xi)$ sera appelée la *vie normale*. Cette grandeur a une signification statistique bien simple. Car d'après (5) la vie normale

$$e(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{l(z)}{l(\xi)} dz \quad (10)$$

est l'écart moyen de la distribution des décès à partir de l'âge normal.

D'après Lexis, on peut calculer l'âge normal par une interpolation quadratique sur les nombres $D(x)$ des décédés. Soit m un âge entier de façon que les deux différences

$$D(m) - D(m-1) = \Delta_{-1} \quad (11)$$

$$D(m) - D(m+1) = \Delta_1 \quad (11')$$

soient positives. Alors l'âge normal sera (3, 4)

$$\xi = m + \frac{\Delta_{-1}}{\Delta_1 + \Delta_{-1}} \quad (12)$$

La probabilité normale $l(\xi)$ peut être calculée par interpolation linéaire

$$l(\xi) = l(m) - \frac{\Delta - 1}{\Delta_1 + \Delta - 1} D(m) \quad (13)$$

Par le même procédé, on obtient la vie normale par

$$e(\xi) = \frac{1}{l(\xi)} \left[T(m) - \frac{\Delta - 1}{\Delta_1 + \Delta - 1} (T(m) - T(m + 1)) \right] \quad (14)$$

D'ailleurs, on pourrait aussi bien appliquer l'interpolation linéaire directement à l'espérance de vie. Mais le procédé (14) est préférable parce que la fonction $T(x)$ est généralement donnée avec plus de décimales que l'espérance de vie. Pourtant le second procédé devient nécessaire si cette fonction n'est pas contenue dans la table. Les trois quantités ξ , $l(\xi)$, $e(\xi)$ seront appelées les *valeurs normales*.

Il se présente (d'ailleurs assez rarement) des tables où il y a deux maxima très proches vers les hauts âges, pour lesquels les valeurs $D(x)$ peuvent même être identiques. Soit D_v ; ($v = 1, 2 \dots 5$) cinq valeurs consécutives, et D_2 et D_4 les deux maxima entourant un minimum. Le procédé supplémentaire sera jugé nécessaire, si

$$D_2 > D_3; D_4 > D_1 \quad (11'')$$

Car, si la première condition n'est pas remplie, on pourrait poser $D(m) = D_4$ et si la seconde n'est pas réalisée, on aurait de même $D(m) = D_2$.

Pour construire un seul maximum, il faut changer les données d'une façon ou de l'autre. Le procédé le plus simple sera un ajustement mécanique en prenant pour $v = 2, 3, 4$.

$$D'_v = \frac{D_{v-1} + D_v + D_{v+1}}{3}.$$

On obtient

$$D'_3 - D'_2 = \frac{D_4 - D_1}{3}; D'_3 - D'_4 = \frac{D_2 - D_5}{3}.$$

Puisque ces différences sont positives, on aura d'après le procédé antérieur

$$\xi = (m') + \frac{D_4 - D_1}{D_4 - D_1 + D_2 - D_5} \quad (12'')$$

où m' sera l'âge ayant l'indice (3) où $D(x)$ présente un minimum entouré de deux maxima.

Le tableau I contient les trois valeurs normales pour la Suède et la Suisse.

1. — Valeurs normales pour la Suisse et la Suède
1901-1910

Population	Age normal ξ	Probabilité normale $l(\xi)$	Vie normale $e(\xi)$
Suisse : hommes .	70,56250	0,27129	7,55349
femmes .	73,72222	0,26034	6,58053
Suède : hommes .	78,46667	0,23030	5,80878
femmes .	78,79861	0,26849	6,12067
Suède : population entière	78,66667	0,24946	5,98547

Le tableau II compare six tables américaines établies pour la population blanche, avec les tables équivalentes des nègres. Les valeurs sont tirées de l'excellente compilation de Glover. On obtient de ce tableau une relation intéressante. Les Blancs vivant, en général, à un niveau d'existence plus élevé, leur âge normal est supérieur à celui des nègres. Mais par contre, la vie normale des nègres surpasse celle des Blancs.

II. — Valeurs normales pour les Blancs et les Nègres U. S. A.

Population	Age normal ξ		Vie normale $e(\xi)$		Probabilité normale $l(\xi)$	
	Blancs	Nègres	Blancs	Nègres	Blancs	Nègres
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
h. 01 . . .	75,053	56,915	6,822	43,888	0,21287	0,27745
f. 01 . . .	75,769	66,571	7,025	40,808	0,23794	0,20145
h. 10 . . .	74,000	59,143	7,130	42,027	0,23590	0,24789
f. 10 . . .	73,800	58,000	7,695	43,622	0,29218	0,31561
h. 01/10 . .	75,130	64,321	6,747	40,191	0,21294	0,18359
f. 01/10 . .	75,133	66,281	7,235	40,685	0,25880	0,19886
Columbia : h. 5/10	—	57,828	—	40,578	—	0,19106
— f. 5/10	—	64,077	—	40,705	—	0,18100

Le tableau III contient les valeurs normales pour quelques tables américaines, pour l'Australie et les Indes. Il est construit selon des valeurs croissantes de l'âge normal. Par contre, la vie normale diminue généralement de haut en bas du tableau. Il est facile de comprendre pourquoi.

III. — Valeurs normales pour quelques tables

Population (1)	Age normal ξ (2)	Vie normale $e(\xi)$ (3)	Probabilité normale $l(\xi)$ (4)
<i>Hommes</i>			
India 1901/10.	38,333	18,720	0,28714
U. S. A. White cities 10	68,571	8,720	0,27963
Massachusetts 10.	69,444	8,826	0,30718
U. S. A. foreign born white 10	70,273	8,298	0,32934
New York 10.	70,857	8,226	0,25377
U. S. A. foreign born white 01	73,667	7,089	0,24399
Australia 1901/10	74,200	6,880	0,28011
New Jersey 10	75,185	6,533	0,19100
Michigan 10	75,688	6,626	0,26255
U. S. A. native white 10	75,793	6,570	0,22002
U. S. A. rural white 10.	76,205	6,546	0,26446
U. S. A. native white 01	76,235	6,490	0,21556
Indiana 10	76,258	6,472	0,25776
<i>Femmes</i>			
India 1901/10	39,500	18,695	0,28574
U. S. A. foreign born white 10	71,226	8,151	0,35075
U. S. A. White cities 10	71,574	8,338	0,29443
U. S. A. foreign born white 01	71,667	8,027	0,31733
New York 10.	72,083	8,219	0,29691
Indiana 10	74,647	7,400	0,31740
New Jersey 10	74,846	7,159	0,25296
Massachusetts 10.	74,900	7,344	0,26045
Michigan 10	75,850	6,998	0,29332
Australia 1901/10	75,971	7,192	0,31876
U. S. A. White rural 10	76,500	6,751	0,29020
U. S. A. White native 10	77,167	6,530	0,24728
U. S. A. White native 01	78,074	6,324	0,22378

Appelons *favorables* les tables donnant de grandes valeurs pour l'âge normal, les autres seront dites *défavorables*. Dans le cas le plus défavorable, l'âge normal serait zéro et la vie normale, égale à l'espérance de vie d'un nouveau-né, aurait une

valeur assez élevée, disons $E(\xi) = 18$. Telles sont, par exemple, les valeurs calculées pour la table de John Grount établie pour la fin du $xvii^e$ siècle. Dans le cas le plus favorable, supposons que l'âge normal soit 100 ans et que tous les hommes atteignent cet âge. Alors pour rester dans les limites de la raison, il faudrait admettre que la vie normale fût assez petite, disons un an.

Il faudra donc s'attendre à des variations inverses de l'âge normal et de la vie normale (Voir les tableaux I à III). Mais si l'on compare deux tables pour la même population et pour les deux sexes, la table pour les femmes est souvent tellement plus favorable que non seulement l'âge normal, mais encore la vie normale est supérieur aux valeurs correspondantes pour les hommes.

Notons enfin les ordres de grandeur qui sont, pour l'âge normal 75 ans, pour la probabilité normale 0,25, pour la vie normale 6 ans et pour la force de vie à l'âge normal 10 ans.

Jusqu'à maintenant, la forme analytique des fonctions biométriques n'a pas été considérée. Pour quelques problèmes pratiques nous examinons deux hypothèses permettant la représentation de la mortalité pour les âges élevés qui nous intéressent. La première, due à Lexis (Voir aussi Bortkiewicz 1, Gumbel 1-4) consiste à supposer que l'âge dit normal est la moyenne d'une distribution de Gauss. On considère donc comme normal que les hommes meurent à l'âge ξ . Les décès à d'autres âges sont considérés comme des déviations dues au hasard. Or la distribution de Gauss est

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x - \xi)^2} \quad (15)$$

et satisfait à la condition de l'aire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) dz = 1.$$

Pour l'utiliser comme formule biométrique, on introduit, en plus des constantes h et ξ , une troisième constante k , telle que la probabilité normale observée soit conservée par la formule. On pose donc

$$\theta(x) = k\varphi(x). \quad (16)$$

Pour la détermination de h , on demande d'après (1)

$$l(\xi) = \frac{k \cdot h}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-h^2(x - \xi)^2} dx.$$

Pour intégrer, introduisons une variable réduite sans dimension

$$t = h \sqrt{\pi}(x - \xi) \quad (17)$$

On obtient

$$l(\xi) = \frac{k}{2}.$$

La nouvelle constante k est donc déterminée. Pour obtenir h , il suffit de faire usage de l'interprétation donnée en haut pour la vie normale. La loi de Gauss étant symétrique, on obtient

$$e(\xi) = \frac{1}{h \sqrt{\pi}} \quad (18)$$

Cela permet d'écrire la variable réduite t sous la forme normale

$$\boxed{t = \frac{x - \xi}{e(\xi)}} \quad (17')$$

Cette grandeur sera appelée *l'âge réduit*. La distribution des décès autour de l'âge normal est, d'après (15), (16), (18)

$$\theta(x) = \frac{2l(\xi)}{e(\xi)\pi} e^{-\frac{t^2}{\pi}} \quad (19)$$

où les trois constantes ξ , $l(\xi)$, $e(\xi)$ sont les valeurs normales observées. La fonction de survie est, d'après (1)

$$l(x) = \frac{2l(\xi)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{t}{\sqrt{\pi}}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

En introduisant l'intégrale de Gauss

$$\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{t}{\sqrt{\pi}}} e^{-z^2} dz \quad (20)$$

on obtient pour les âges supérieurs (inférieures), à l'âge normal $x \gtrless \xi$

$$l(x) = l(\xi) \left(1 \mp \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\pi}}\right)\right) \quad (21)$$

Il s'en suit que la condition de l'aire n'est pas vérifiée. En effet, on obtient

$$l(o) = l(\xi) \left(1 + \Phi \left(\frac{\xi}{e(\xi)\sqrt{\pi}} \right) \right)$$

ou d'après l'ordre de grandeur des valeurs normales ⁽¹⁾

$$l(o) \approx \frac{1}{2}. \quad (21'')$$

La distribution de Lexis ne traite que la moitié des décès. Pour de grands âges, on obtient les fonctions biométriques sous une forme simplifiée. Car d'après la règle de L'Hopital on peut écrire ⁽¹⁾ pour de grandes valeurs de t suivant R. von Mises ⁽²⁾

$$\frac{1 - \Phi \left(\frac{t}{\sqrt{\pi}} \right)}{e^{-\frac{t^2}{\pi}} : t} \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2t^2}} \quad (22)$$

d'où l'on tire, d'après (3), (19) et (21) l'intensité de mortalité aux âges élevés

$$\mu(x) = \frac{2t}{e(\xi)\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2t^2} \right) \quad (23)$$

et d'après (3) et (19) la fonction de survie

$$l(x) = \frac{l(\xi)}{t + \frac{\pi}{2t}} e^{-\frac{t^2}{\pi}}. \quad (24)$$

Reste encore la question de savoir à partir de quelle valeur de t on peut traiter les fonctions biométriques de cette manière. Posons pour le moment

$$t = u \sqrt{\pi}$$

et employons le développement de l'intégrale de Gauss pour de grandes valeurs de u

$$\Phi(u) = 1 - \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^3} + \frac{3}{4u^5} - \frac{15}{8u^7} + \dots \right)$$

d'où

$$\frac{1 - \Phi(u)}{e^{-u^2} : (u\sqrt{\pi})} = 1 - \frac{1}{2u^2} + \frac{3}{4u^4} - \frac{15}{8u^6} + \dots \quad (22')$$

⁽¹⁾ Le signe \approx exprime l'ordre de grandeur. Une équivalence asymptotique sera désignée par ∞ . Le symbole \rightarrow veut dire limite. Enfin nous désignons par \gg très grand par rapport à une valeur v .

On peut confondre ce développement avec la valeur (22) s'il est légitime de poser (1)

$$2u^4 \gg 1.$$

Cette relation peut être considérée comme vérifiée à partir de $u \geq 2,4$. Par suite les formules (23) et (24) sont légitimes à partir de

$$t \geq 2,4 \sqrt{\pi} \quad (25)$$

Enfin pour des âges qui sont encore plus élevés on aura, d'après (19) et (23), l'équivalence asymptotique importante

$$-\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} \sim \mu(x) \quad (22'')$$

pourvu que

$$2u^2 \gg 1.$$

La seconde hypothèse dont nous ferons usage est celle de Gompertz (voir le Textbook). Il considère l'intensité de mortalité $\mu(x)$ et suppose qu'elle augmente toujours avec l'âge d'après

$$\mu(x) = be^{\gamma x} \quad (26)$$

Les deux constantes b et γ , qui toutes les deux ont la dimension inverse d'un âge, doivent être positives.

Bien que la formule (26) soit vieille de 100 ans, la nature des deux constantes n'a été précisée que récemment (Gumbel 5, Goldziher). Leur signification est bien simple. Car pour l'âge normal on obtient, d'après (8')

$$\mu(\xi) = \gamma \quad (27)$$

Donc, γ est l'intensité de mortalité à l'âge normal; car la condition (9') est vérifiée, d'après (27). Il s'en suit $\gamma > b$, puisque b est supposé être l'intensité de mortalité à l'âge zéro. L'âge normal lui-même est, d'après (26) et (27),

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \lg \frac{\gamma}{b}. \quad (27')$$

On peut donc déterminer la constante γ en calculant l'intensité de mortalité à l'âge normal. Mais il est plus avantageux de lier cette constante à la vie normale. On aura pour la fonction de survie, d'après (4) et (26) en choisissant $x_0 = \xi$

$$l(x) = l(\xi) e^{1 - \frac{b}{\gamma} e^{\gamma x}} \quad (28)$$

et la vie normale est, d'après (10),

$$e(\xi) = e \int_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{b}{\gamma} e^{\gamma x}} dx.$$

En introduisant une nouvelle variable d'intégration z définie par

$$\frac{b}{\gamma} e^{\gamma x} = z$$

on obtient d'après (27)

$$e(\xi) = \frac{e}{\gamma} \int_1^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z}.$$

L'intégrale est une transcendante appelée logarithme intégral dont la valeur numérique est 0,219383934. La constante γ est donc liée à la vie normale par

$$\gamma = \frac{p}{e(\xi)}; \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{e(\xi)}{p} \quad (29)$$

la valeur numérique de la constante étant $p = 0,596347355$. Les formules (27') et (29) permettent la détermination des deux constantes. D'après l'ordre de grandeur de la vie normale, la valeur de γ donnée par (29) est de l'ordre 0,1. D'après (27') la constante b est de l'ordre 10^{-4} . Par suite $\frac{b}{\gamma}$ peut certainement être négligé par rapport à 1.

D'ailleurs on peut éviter le calcul des constantes en introduisant la variable réduite (17'). On obtient alors pour la fonction de survie (28), d'après (27') et (29),

$$l(x) = l(\xi) e^{1 - e^{pt}} \quad (28')$$

et pour l'intensité de mortalité

$$\mu(x) = \frac{p}{e(\xi)} e^{pt} \quad (26')$$

La formule (28) ne vérifie pas la condition de l'aire. En effet, on obtient d'après (4), (26) et (27) par intégration de zéro à ξ

$$l(0) = l(\xi) e. \quad (28'')$$

L'ordre de grandeur de $l(0)$ est donc 0,70.

Notons enfin que l'équivalence asymptotique (22'')

$$-\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} \sim \mu(x)$$

est vérifiée d'après (26'), (3) et (28) pourvu que $e^{pt} \gg 1$.

Les deux formules de Lexis et de Gompertz ont quelques propriétés communes. D'abord toutes les deux contiennent trois constantes qu'on peut facilement remplacer par les trois valeurs normales. Puis elles permettent l'introduction de l'âge réduit (17'). La comparaison des formules faite dans le tableau IV en est faci-

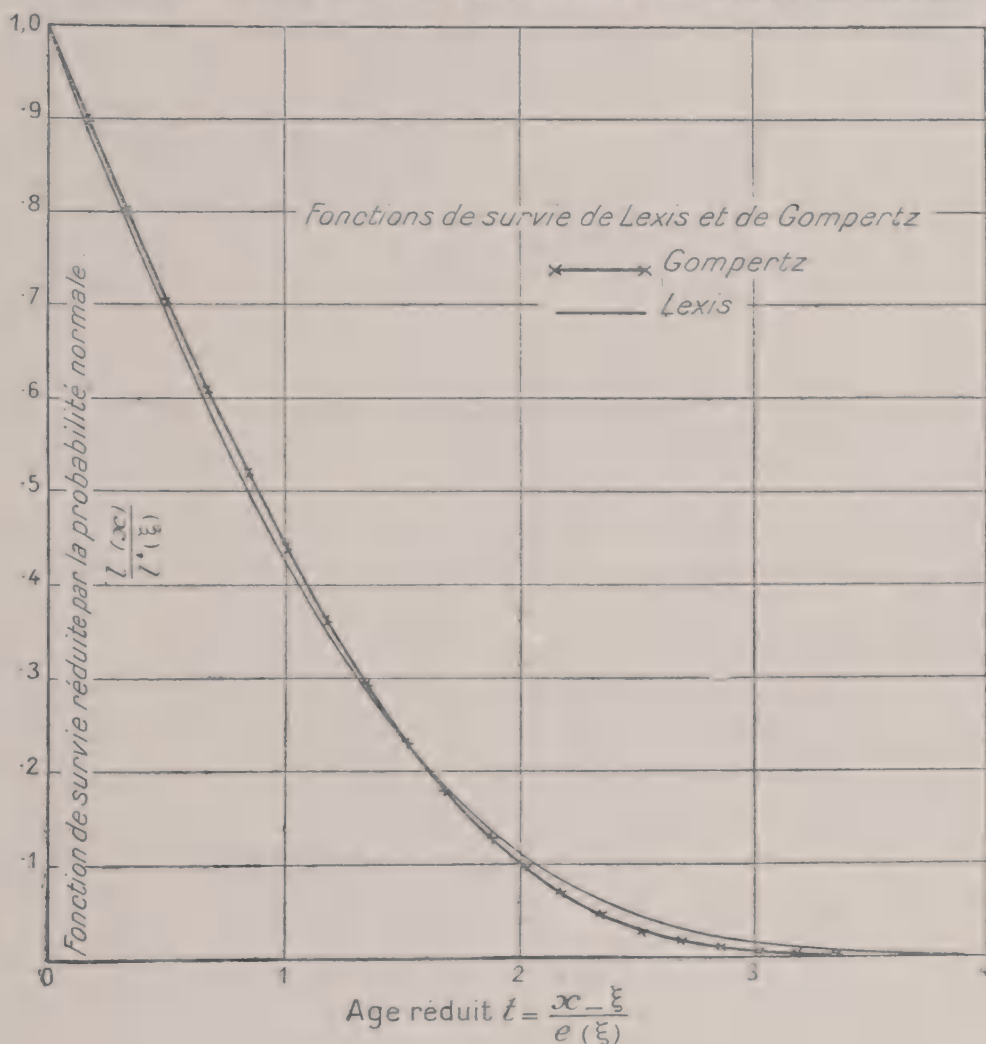


FIG. 1.

lité. Enfin les deux formules vérifient l'équivalence asymptotique.

La figure 1 représente les variations de la fonction de survie $l(x)$ divisée par la probabilité normale $l(\xi)$ avec l'âge réduit t pour les deux formules. Les différences numériques sont minimales. Mais pour de petites (grandes) valeurs de la variable réduite, la fonction $\frac{l(x)}{l(\xi)}$ de Lexis est toujours inférieure (supérieure) à celle de Gompertz.

IV. — Formules biométriques de Lexis et de Gompertz.

Fonction biométrique	Désignation	Formule de Lexis	Formule de Gompertz	Ecriture uniforme
Age réduit	t	$\frac{x - \xi}{e(\xi)}$	$\frac{x - \xi}{e(\xi)}$	$\frac{x - \xi}{e(\xi)}$
Distribution des décès .	$\theta(x)$	$\frac{2l(\xi)}{e(\xi)\pi} e^{-\frac{t^2}{\pi}}$	$\frac{pl(\xi)}{e(\xi)} e^{1+pt - ept}$	$\frac{l(\xi)}{e(\xi)} f'(t)e^{-f(t)}$
Fonction de survie . .	$l(x)$	$l(\xi) \left(1 - \Phi \left(\frac{t}{\sqrt{\pi}} \right) \right)$	$l(\xi)e^{1 - ept}$	$l(\xi)e^{-f(t)}$
Valeur initiale de $l(x)$.	$l(0)$	$2l(\xi)$	$e l(\xi)$	$(1 + k) l(\xi), k > 0$
Intensité de mortalité .	$\mu(x)$	$\frac{2}{e(\xi)\pi} \frac{e^{-\frac{t^2}{\pi}}}{1 - \Phi \left(\frac{t}{\sqrt{\pi}} \right)}$	$\frac{p}{e(\xi)} e^{pt}$	$\frac{f'(t)}{e(\xi)}$
Valeur des constantes .		$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56419$	$p = 0,59635$	
Condition de l'équivalence asymptotique .	$\frac{-\theta'(x)}{\theta(x)} \sim \mu(x)$	$2t^2 \gg \pi$	$e^{pt} \gg 1$	$f'(t) \gg f''(t)$

Dans le tableau IV, chaque ligne de la dernière colonne est une forme commune aux colonnes précédentes de la même ligne. Pour la formule de Lexis cette écriture uniforme n'est valable que pour de grandes valeurs de l'âge réduit. C'est pour les mêmes valeurs qu'on peut identifier la formule de Gompertz-Makeham à la formule spéciale de Gompertz que nous avons traitée ici.

L'écriture uniforme vaut aussi, si l'intensité de mortalité tend vers une limite. Dans ce cas la distribution des décès serait exponentielle pour les âges très élevés et on aurait $f(t) = t$.

Pour toute formule analytique qui permet l'introduction de la fonction

$$f(t) = \lg \frac{l(x)}{l(\xi)}$$

l'intensité de mortalité est inversement proportionnelle à la vie normale, ce qui fortifie la relation (3'). La fonction $f(t)$ est soumise aux conditions

$$f(0) = 0 ; \quad f(t) > 0 ; \quad f(t) \rightarrow \infty .$$

La nature des fonctions biométriques pour les âges élevés a été étudiée d'une façon claire par M. de Finetti. Enfin M. Huber a résumé les méthodes d'ajustement usuelles pour ces âges. Ces notions sur les fonctions biométriques suffisent pour accomplir la tâche que nous nous sommes proposés.

III

THÉORIE DU DERNIER AGE

Nous définissons le plus grand âge observé comme étant celui du dernier parmi N décédés. Car la variable statistique de la distribution dite initiale, dont nous voulons calculer la plus grande valeur, est l'âge au décès. Pourtant il sera légitime de considérer N d'une façon plus vague comme un nombre de nouveaux-nés, puisque tout nouveau-né meurt un jour. Il s'agit de déterminer une valeur théorique du plus grand âge relative à une population donnée et à un nombre donné d'observations.

La probabilité $W_N(x)$ pour que le plus grand âge pour N décédés soit moindre ou égal à x , est

$$W_N(x) = (1 - l(x))^N \quad (30)$$

La densité de probabilité $w_N(x)$ pour qu'un âge x au décès soit le plus grand parmi N décès, est pour n'importe quelle valeur de N

$$w_N(x) = N(1 - l(x))^{N-1} \theta(x) \quad (31)$$

Pour $N = 1$ on retourne naturellement à la distribution initiale

$$w_1(x) = \theta(x) \quad (31')$$

Pour N arbitraire, on ne trouve pas une valeur déterminée du plus grand âge. Il n'existe qu'une densité de probabilité pour que le plus grand âge ait la valeur x . Du moment que l'on traite un problème du point de vue probabiliste, on ne peut arriver qu'à des probabilités. Pour fixer tout de même une valeur du plus grand âge, on calculera les valeurs caractéristiques de la distribution (31). Elle aura une dominante $\bar{\omega}$, qui sera appelée le

dernier âge, une espérance mathématique ϖ , qui sera appelée l'*âge limite*, et un écart type σ . La fonction linéaire

$$\tau = \frac{\tilde{\omega} - \xi}{\theta(\xi)} \quad (32)$$

qui correspond à l'âge réduit (17'), sera appelée le *dernier âge réduit*. De même la fonction linéaire

$$\bar{t} = \frac{\varpi - \xi}{\theta(\xi)} \quad (32')$$

sera appelée l'*âge limite réduit*.

Notre but est de calculer le dernier âge, l'âge limite et l'écart type, pour comparer ces valeurs théoriques aux observations que nous appellerons *les plus grands âges*.

Déterminons d'abord le dernier âge, en différentiant (31) par rapport à x , ce qui donne

$$\frac{N-1}{1-l(\tilde{\omega})} \theta(\tilde{\omega}) + \frac{\theta'(\tilde{\omega})}{\theta(\tilde{\omega})} = 0 \quad (33)$$

Le calcul de la dominante $\tilde{\omega}$ en fonction de N demande la résolution de cette équation ordinaire. Au lieu d'une résolution exacte qui suppose la connaissance analytique de la fonction de survie, nous traitons deux approximations valables pour de grandes valeurs de N . On obtient une première solution approchée en négligeant $l(\tilde{\omega})$ par rapport à 1 et 1 par rapport à N . La condition

$$N \gg 1 \gg l(\tilde{\omega}) \quad (34)$$

mène à

$$N = - \frac{\theta'(\tilde{\omega})}{\theta^2(\tilde{\omega})} \quad (35)$$

De cette équation on peut tirer $\tilde{\omega}$ en fonction de N pour une expression analytique $\theta(x)$ donnée. Puis, en calculant la fonction de survie à l'âge $\tilde{\omega}$ on peut vérifier à l'aide de (34) si le nombre N est suffisamment grand. C'est cette formule qui sera employée dans le chapitre (V).

Supposons d'autre part que les fonctions biométriques vérifient, pour le dernier âge, la relation

$$\mu(\tilde{\omega}) = - \frac{\theta'(\tilde{\omega})}{\theta(\tilde{\omega})} \quad (34')$$

qui vaut, d'une façon asymptotique, pour les fonctions de Lexis et de Gompertz, et d'une façon exacte pour la théorie de Finetti. On ne peut pas contrôler cette hypothèse par les observations. Car nous supposons que cette relation est valable précisément pour les très grands âges où le nombre d'observations est insuffisant pour la construction des valeurs biométriques.

Mais d'autre part, on se rend facilement compte de la raison de cette hypothèse. Pour toute formule biométrique qui ne possède pas d'âge limite fixe, la densité de mortalité $\theta(x)$ et la fonction de survie $l(x)$ tendent vers zéro. Par suite, l'intensité de mortalité $\mu(x)$ devient un quotient indéterminé. De plus, la dérivée $\theta'(x)$ tend vers zéro par valeurs négatives. L'égalité (34') est donc une approximation de la règle de L'Hopital ; mais elle n'est pourtant pas une trivialité. C'est une condition analytique que nous imposons aux fonctions biométriques. De plus, elle implique que le nombre d'observations soit suffisamment grand, ce qui conduit à une condition numérique. Cela résulte de ce que $\bar{\omega}$ est une fonction toujours croissante de N , ce qui sera prouvé tout à l'heure.

Supposons que (34') soit vérifié. On obtient alors le dernier âge par la formule simple et importante

$$l(\bar{\omega}) = \frac{1}{N} \quad (35')$$

On peut facilement établir une relation entre les deux déterminations du dernier âge. Introduisons dans (35) l'intensité de mortalité. Grâce aux relations (3) et (8) entre la densité de mortalité, l'intensité de mortalité et la fonction de survie, on obtient

$$N = \frac{1}{l(\bar{\omega})} \left(1 - \frac{\mu'(\bar{\omega})}{\mu^2(\bar{\omega})} \right) \quad (35'')$$

On peut donc considérer la formule simple (35'), valable pour de grands nombres de décès, comme une première approximation de la formule (35''). La formule (35') présente l'avantage d'avoir une signification intuitive : *le dernier âge est tel qu'on peut s'attendre à ce que, parmi un nombre donné N de personnes, une seule l'atteigne*. En d'autres mots : La valeur moyenne du nombre de N personnes qui atteignent le dernier âge, est égale à un.

On peut tirer des conséquences assez intéressantes de (35'), avant d'introduire une formule biométrique déterminée. Le dernier âge augmente avec le nombre d'observations; il vient en effet de (35'), en différentiant par rapport à N

$$d\tilde{\omega} = \frac{dlqN}{\mu(\tilde{\omega})} > 0.$$

Puisque $\tilde{\omega}$ est fonction de N , soit $\tilde{\omega}_N$, on obtient, en intégrant de 1 jusqu'à N

$$\tilde{\omega}_N - \tilde{\omega}_1 = \int_1^N \frac{dlqz}{\mu(\tilde{\omega}_z)}.$$

Pour déterminer $\tilde{\omega}_1$ on retourne à la distribution exacte (31) qui donne pour $N = 1$

$$\tilde{\omega}_1 = \xi.$$

On aura donc

$$\tilde{\omega}_N = \xi + \int_1^N \frac{dlqz}{\mu(\tilde{\omega}_z)}.$$

Si la distribution des décès permet l'introduction d'une variable réduite d'après (17'), et si la fonction de survie est de la forme

$$l(x) = l(\xi)e^{-f(\tau)}$$

on peut encore préciser la nature de l'intégrale. Soit d'après (32) τ le dernier âge réduit; on a, d'après (35'),

$$l(\xi)e^{-f(\tau)} = \frac{1}{N}$$

ou en désignant le logarithme naturel par lg

$$f(\tau) = lgNl(\xi).$$

Soit, d'autre part,

$$\tau = F[lgNl(\xi)] \quad (36)$$

la fonction inverse. Le dernier âge sera alors

$$\tilde{\omega} = \xi + e(\xi)F[lgNl(\xi)] \quad (37)$$

où $F[lgNl(\xi)]$ est une fonction toujours croissante du nombre d'observations qui s'annule pour $N = 1$.

L'expression (37) permet un calcul facile du dernier âge pour une population donnée à l'aide des trois valeurs normales, du nombre des décès N et d'une hypothèse valable pour le cours de la mortalité vers les âges élevés. On comprend facilement que le dernier âge est égal à l'âge normal plus un multiple d'une mesure des écarts entre les âges au décès et l'âge normal.

La densité de probabilité du dernier âge est, d'après (31) et (35'),

$$w_N(\tilde{\omega}) = \frac{\mu(\tilde{\omega})}{e} \quad (38)$$

La valeur $\mu(\tilde{\omega})$, l'intensité de mortalité au dernier âge, sera appelée la *dernière intensité de mortalité*. Si l'intensité de mortalité augmente toujours, $\mu(\tilde{\omega})$ augmente avec N ; il en résulte que la distribution $w_N(x)$ se resserre autour de la dominante pour un nombre d'observations croissant. La détermination du dernier âge est d'autant plus précise que la population étudiée est plus grande. Si le nombre N est suffisamment grand, il est justifié de poser

$$\omega \sim \tilde{\omega} \quad (39)$$

La distribution exacte (31) du plus grand âge a le désavantage qu'on ne peut pas calculer son espérance mathématique sans introduire une formule spéciale pour la distribution des décès. Voilà pourquoi on établit la forme finale

$$W(x) = \mu(\tilde{\omega})e^{-y} - e^{-y} \quad (40)$$

vers laquelle tend la distribution (31) pour de grandes valeurs de N , pourvu que la condition (34) soit vérifiée.

La *variable dite finale*

$$y = \mu(\tilde{\omega})(x - \tilde{\omega}) \quad (41)$$

est une transformation linéaire du plus grand âge, distincte du plus grand âge réduit τ , défini par la formule (32).

La formule (40) est la distribution finale de la plus grande valeur d'une distribution initiale $\vartheta(x)$ écrite dans les désignations biométriques. Elle a été énoncée pour la première fois par M. R. A. Fisher. Cet auteur a calculé l'espérance mathématique

et l'écart type de la plus grande valeur. M. Finetti a prouvé la formule pour la distribution initiale de Gauss. Dans un travail antérieur (15) j'ai élargi la preuve à toute une classe de distributions initiales dont fait partie, par exemple, la distribution de Gompertz. D'ailleurs, pour la distribution initiale exponentielle, on obtient la distribution finale de la plus grande valeur sans avoir besoin de passer par une limite.

Les deux constantes dans la distribution finale du plus grand âge sont le dernier âge $\tilde{\omega}$ et la dernière intensité de mortalité $\mu(\tilde{\omega})$. Cela justifie notre choix antérieur du dernier âge comme valeur caractéristique.

Si l'intensité de mortalité augmente avec l'âge sans limite, la distribution finale du plus grand âge se resserre autour de la dominante pour un nombre d'observations croissant. S'il existe une limite, la distribution finale vaut aussi ; seulement la distribution de la plus grande valeur ne se resserre plus à partir d'une certaine valeur de N .

Notons tout de suite une différence entre l'emploi des formules (35) et (40). Pour l'une, on a besoin d'une expression analytique de la fonction de survie. Pour l'autre ce n'est pas nécessaire si l'on connaît $\tilde{\omega}$ et $\mu(\tilde{\omega})$ et toute trace d'une fonction spéciale de survie a disparu.

La formule finale (40) permet le calcul de l'espérance mathématique (15). Cet âge limite devient

$$\varpi = \tilde{\omega} + \frac{c}{\mu(\tilde{\omega})} \quad (42)$$

où c , la constante d'Euler, est à peu près 0,58. L'égalité approximative (39) reste juste, même si l'intensité de mortalité tend vers une limite. Car d'après (42) il suffit que le produit de l'intensité de mortalité par l'âge augmente pour les âges élevés. D'ailleurs cette formule n'introduit pas un facteur nouveau par rapport à (37), car d'après le tableau IV, 5^e ligne, l'intensité de mortalité au dernier âge sera liée, d'une façon ou de l'autre, à la vie normale.

On obtient, d'après (42) et (32'), l'âge limite réduit

$$\bar{t} = \tau + \frac{c}{e(\xi)\mu(\tilde{\omega})} \quad (42')$$

Cette expression se simplifie puisque la vie normale est l'inverse de la dernière intensité de mortalité pour toutes les formules biométriques qui permettent l'écriture uniforme.

L'écart type de la distribution finale du plus grand âge est (15)

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6} \mu(\omega)} \quad (43)$$

La grandeur sans dimension $\sigma : e(\xi)$ sera appelée l'*écart type réduit*. C'est, d'après (10), l'écart type de la distribution finale du plus grand âge divisé par l'écart moyen de la distribution des décès à partir de l'âge normal. Sa valeur est

$$\frac{\sigma}{e(\xi)} = \frac{\pi}{\sqrt{6} \mu(\bar{\omega}) e(\xi)} \quad (43')$$

Alors l'âge limite réduit devient, d'après (42'),

$$\bar{t} = \tau + \frac{c\sqrt{6}}{\pi} \frac{\sigma}{e(\xi)} \quad (42'')$$

Enfin on peut exprimer l'écart type réduit comme un multiple de la différence réduite entre l'âge limite et le dernier âge

$$\frac{\sigma}{e(\xi)} = (\bar{t} - \tau) \frac{\pi}{c\sqrt{6}} \quad (43'')$$

Le calcul de l'écart type peut servir à déterminer un intervalle dans lequel doit se trouver le plus grand âge avec une probabilité déterminée. La probabilité $W_N(x)$, formule (30), pour que le plus grand âge soit inférieur à x , tend d'après (40) vers la *probabilité finale*

$$W(x) = e^{-e^{-y}} \quad (44)$$

Le tableau V contient ces valeurs en fonction de la variable réduite.

V. — *Probabilités des plus grands âges.*

Variable réduite y	Probabilité $W(x)$
— 1,5	0,01132
— 1,0	0,06599
— 0,5	0,19230
0	0,36788
0,5	0,54523
1,0	0,69220
1,5	0,80003
2,0	0,87345
2,5	0,92120
3,0	0,95143
3,5	0,97025
4,0	0,98185
4,5	0,98895
5,0	0,99328
5,5	0,99592

La probabilité pour que le plus grand âge vérifie

$$\tilde{\omega} - \sigma < x < \tilde{\omega} + \sigma$$

ou, d'après (41) et (43), pour que la variable réduite, vérifie

$$-\frac{\pi}{\sqrt{6}} < y < \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

est

$$W\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) - W\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right).$$

A l'aide du tableau V, on obtient, par une interpolation simple,

$$W\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) = 0,75313; W\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) = 0,04221.$$

Il existe donc une probabilité de 71 0/0 pour que le plus grand âge x satisfasse aux inégalités

$$\tilde{\omega} - \frac{\pi}{\sqrt{6} \mu(\tilde{\omega})} < x < \tilde{\omega} + \frac{\pi}{\sqrt{6} \mu(\tilde{\omega})} \quad (45)$$

Les valeurs inférieures à cet intervalle ont une probabilité de 4 0/0 et les valeurs supérieures une probabilité de 25 0/0.

Le tableau suivant contient les valeurs numériques des constan-

tes. Nous y avons joint quelques grandeurs dont la portée sera montrée plus tard.

VI. — Quelques constantes numériques.

Constante du cercle	Constante de Euler
$\frac{\pi}{\sqrt{6}} = 1,28254969$	$c = 0,577215665$
$\frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0,77969680$	$\frac{c\sqrt{6}}{\pi} = 0,450053261$
$\frac{\pi^2}{\sqrt{6}} = 4,02924821$	$c\pi = 1,813376491$
Constante logarithmique	Constante de Gompertz
$2 \log e = 0,86858896$	$p = 0,596347355$
$\frac{\log e}{\pi} = 0,13824023$	$\frac{1}{p} = 1,676875063$
	$\frac{\pi}{\sqrt{6} p} = 2,150675586$
	$\frac{c}{p} = 0,967918553$

Avant d'appliquer la formule (35) à une formule biométrique spéciale, il est avantageux d'analyser quelques propriétés de (37). Cette détermination du dernier âge se distingue des tentatives antérieures par le fait important qu'on utilise seulement les valeurs normales ; aucune observation portant sur les âges extrêmes eux-mêmes est employée directement. De plus, cette détermination n'est pas liée à une seule formule biométrique. Enfin, le dernier âge augmente toujours avec le nombre des décès observés.

Le dernier âge et l'âge limite dépendent de quatre facteurs : les trois valeurs normales qui dérivent de la table de mortalité, valeurs biométriques, et le nombre N des décès, valeur démographique. Ce nombre N varie suivant qu'on examine tout le territoire ou une partie d'un pays, une année, une décade ou un siècle, ou seulement le nombre des décès ayant servi à la construc-

tion d'une table. Le choix de N est arbitraire du point de vue biométrique. En tout cas on obtient le dernier âge pour la population et l'intervalle envisagé.

Il faut distinguer le nombre des décès N du nombre $N/(\xi)$, égal à peu près au quart du premier. Cette valeur sera appelée *le nombre d'observations*. Car c'est seulement la distribution des décès autour de l'âge normal qui sera utilisée pour nos calculs : Matusalem n'est pas mort d'une maladie infantile.

Les influences des quatre facteurs sur le dernier âge sont assez différentes. D'abord, le dernier âge augmente avec la probabilité normale ; mais cette influence peut être négligée, car le facteur multiplicatif ne dépend que du logarithme du nombre d'observations.

Comparons deux tables ayant le même âge normal, la même vie normale, et pouvant être représentées par la même formule biométrique. Le dernier âge est supérieur pour la table correspondant au plus grand nombre d'observations. Le dernier âge à une époque donnée sera toujours inférieur au dernier âge atteint jusqu'à cette époque, puisqu'il croît avec le nombre d'observations. Cet âge augmente avec le temps, même si les conditions hygiéniques restent les mêmes. Par exemple, si à partir d'une année quelconque, disons 1880, on considère les années suivantes, le dernier âge atteint jusqu'à une certaine époque augmentera toujours. Mais réciproquement, si l'on retourne vers les années passées, le dernier âge atteint jusqu'à une certaine époque augmentera de même. En effet, ce n'est pas le temps proprement dit, mais seulement l'augmentation du nombre d'observations, qui est la cause de l'accroissement du dernier âge atteint jusqu'à une époque.

Chaque fois que l'âge normal devient plus élevé, le dernier âge est accru, d'après (37), de la même quantité. Celui-ci augmentera donc avec l'âge normal et aussi avec la vie normale. Plus le nombre d'observations est grand, plus cette dernière influence est forte. Comparons deux tables, représentées par la même formule biométrique, donnant la même vie normale et reposant sur le même nombre d'observations ; la table ayant l'âge normal plus élevé, aura aussi le dernier âge plus élevé.

Le nombre d'observations étant la base même de notre théorie, on ne peut pas essayer d'éliminer son influence. Mais on peut

comparer deux populations au point de vue de la longévité en calculant un *dernier âge virtuel* $\tilde{\omega}$ basé sur un même nombre arbitraire d'observations.

Prenons deux tables, ayant différents âges normaux et différentes vies normales, telles qu'on puisse les représenter par la même formule. La table favorable aura un dernier âge virtuel plus petit que la table défavorable (12), car les tables favorables ont en général de petites valeurs pour la vie normale et réciproquement. Il s'en suit *le paradoxe du dernier âge*.

Comparons pour le même nombre d'observations deux tables, dont la première soit plus favorable que l'autre, et pour lesquelles

$$\xi_1 > \xi_2 ; e_1(\xi_1) < e_2(\xi_2) \quad (46)$$

On aura d'après (37)

$$\tilde{\omega}_1 \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} \tilde{\omega}_2 \quad (46')$$

pourvu que

$$\tau \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} \frac{\xi_1 - \xi_2}{e_2(\xi_2) - e_1(\xi_1)} \quad (46'')$$

Pour un nombre d'observations suffisamment grand, la table défavorable donnera un dernier âge virtuel supérieur. La différence entre les âges virtuels augmentera avec les observations.

Cette supériorité des tables, défavorables du point de vue du dernier âge, s'explique facilement d'après les fondements de notre théorie. Le plus grand écart à attendre pour une distribution quelconque et pour un nombre d'observations donné est un multiple d'une mesure des écarts, disons l'écart moyen. Or, la table de survie favorable a un grand âge normal, mais une petite vie normale correspondant à un petit écart moyen, tandis que la table défavorable a un grand écart moyen.

D'ailleurs, on peut se rendre compte aussi de cette supériorité du point de vue biométrique, car pour la table la plus favorable, donnant par exemple $\xi = 100$ et $e(\xi) = 2$, le dernier âge virtuel restera proche de 100. Il sera surpassé, pour un nombre d'observations suffisant, par le dernier âge virtuel de la distribution la plus défavorable ayant, disons $\xi = 0$; $e(\xi) = 18$.

Le contraire se produit si une table est défavorable, par rap-

port à une autre, à un degré tel que sa vie normale aussi soit plus petite que celle de l'autre. C'est le cas lorsqu'on compare les tables de survie pour les hommes et les femmes de la même population. L'infériorité des hommes est telle que leur dernier âge est plus petit que celui des femmes.

Dans le passé et actuellement dans les pays arriérés, les tables de survie étaient et sont défavorables. Cela pourrait expliquer qu'il y ait des hommes qui atteignent des âges très élevés, et les mauvais renseignements ne seraient pas l'unique explication. Mais cela suppose qu'il est légitime de représenter la survie de ces populations par les mêmes formules que celle des populations vivant dans des conditions favorables.

Pour juger une table de mortalité, il y a deux points de vue opposés. Il est courant de considérer l'accroissement de l'âge normal comme un signe de progrès. L'autre critère est l'âge du dernier survivant. L'accroissement de l'un peut entraîner la diminution de l'autre. C'est, sans aucun doute, le premier point de vue qui est légitime. L'accroissement de l'âge normal est préférable, même s'il entraîne une mort « prématurée » du dernier survivant.

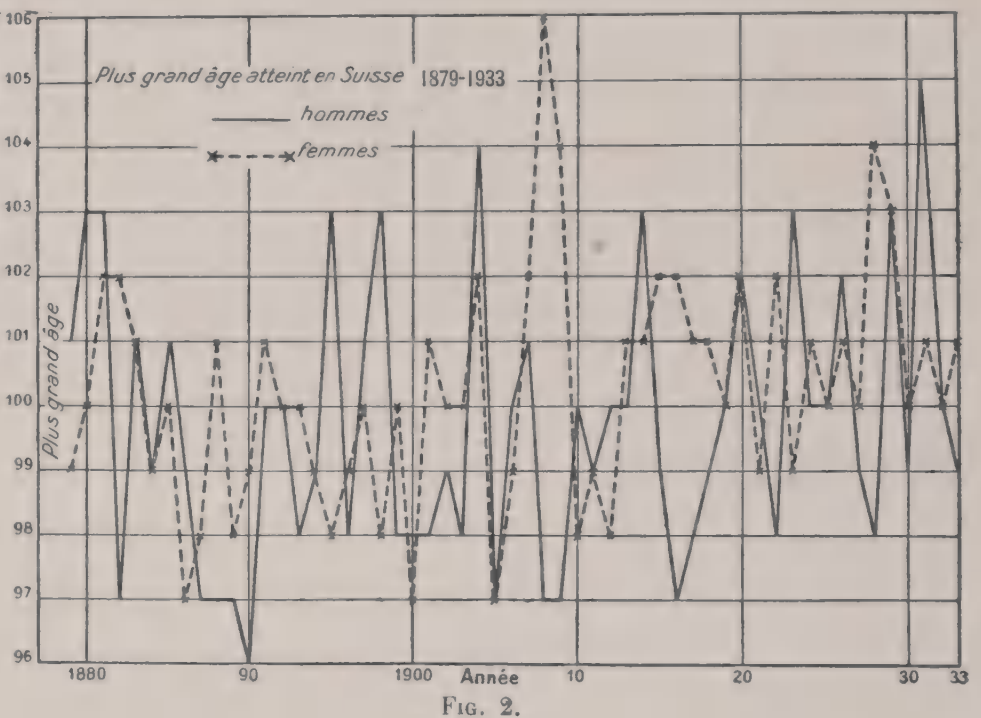
En résumé, les deux formules (37) et (40) résolvent notre problème et nous permettent des applications pratiques. Les statistiques peuvent fournir le plus grand âge observé pour une année. Si ces valeurs sont connues pour plusieurs années, on peut les classer en distributions. Notre théorie nous a mené à la connaissance (40) de cette distribution, qu'on peut comparer aux observations. Ce sera l'objet du chapitre suivant. Pour cette comparaison il n'est nullement nécessaire de choisir une formule déterminée pour la table de survie.

Par contre, si nous voulons calculer le dernier âge ou l'âge limite d'une population donnée pour un an ou pour quelques années, il faut choisir une formule d'interpolation pour représenter la survie. Ce calcul sera fait pour la formule de Lexis et celle de Gompertz dans les chapitres (V) et (VI).

IV

DISTRIBUTIONS DU PLUS GRAND AGE EN SUISSE ET EN SUEDE

Pour vérifier par les observations faites sur le plus grand âge les théories du chapitre précédent, il nous faut des renseignements exacts et nombreux, observations qui sont assez rares. Mais



le Bureau Fédéral Statistique de la Suisse et le Statistisk Centralbyrån de la Suède ont mis généreusement à ma disposition leurs observations ⁽¹⁾ détaillées portant respectivement sur les années 1879-1933 et 1881-1932.

⁽¹⁾ Je profite de cette occasion pour les remercier.

Les figures (2) et (3) indiquent, pour chaque année, les âges entiers après lesquels les derniers survivants en Suisse et en Suède sont morts. La première colonne du tableau VII contient le plus grand âge, les suivantes, le nombre des années où cet âge fut le plus grand.

Le nombre des cas observés pour les deux sexes (tableau VII, 1^{re} ligne) est naturellement la somme des cas pour chaque sexe séparé. On devrait donc aboutir à 110 et 104 cas. Mais pour pou-

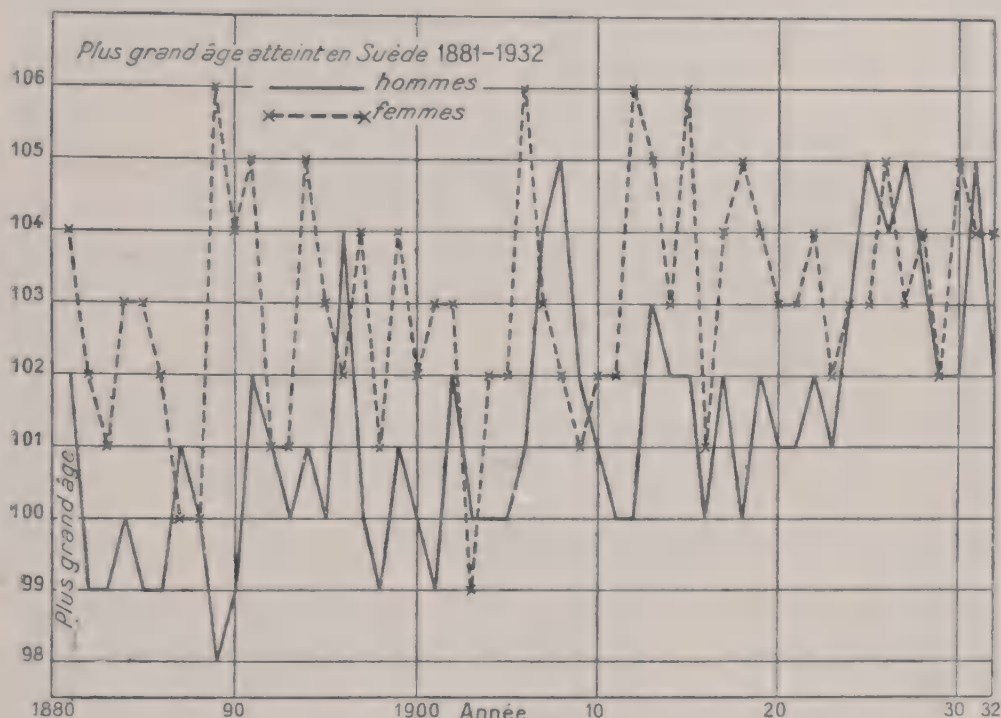


FIG. 3.

voir dessiner les trois fréquences de chaque pays à la même échelle, nous avons divisé ces nombres par deux. Cela permettra de calculer toutes les fréquences théoriques par le même procédé. La moyenne des plus grands âges des femmes est supérieure à celle des hommes (ligne 2). Par contre, les distributions pour les hommes sont moins serrées que pour les femmes (ligne 3).

Pour comparer les observations et la théorie (40), il faut déterminer les deux constantes $\tilde{\omega}$ et $\mu(\tilde{\omega})$. On les obtient, à l'aide de (43) et (42), par

$$\frac{1}{\mu(\tilde{\omega})} = 0,77970 \sigma \quad (47)$$

$$\tilde{\omega} = \pi - 0,45005 \sigma \quad (48)$$

VII. — *Distributions observées du plus grand âge et calcul des constantes.*
Suisse (1879-1933), Suède (1881-1932).

Plus grand âge (1)	Hommes		Femmes		Population entière	
	Suisse (2)	Suède (3)	Suisse (4)	Suède (5)	Suisse (6)	Suède (7)
96.	1	0	0	0	0,5	0
97.	8	0	3	0	5,5	0
98.	9	1	6	0	7,5	0,5
99.	40	7	9	1	9,5	4
100.	11	13	13	2	12	7,5
101.	5	9	12	6	8,5	7,5
102.	2	12	8	11	5	11,5
103.	7	2	1	12	4	7
104.	4	4	2	10	1,5	7
105.	4	4	0	6	0,5	5
106.	0	0	1	4	0,5	2
Nombre d'années k	55	52	55	52	55	52
Age limite ϖ	99,69091	104,26923	100,27273	103,01923	99,98182	102,4423
Ecart type σ	2,41379	1,78794	1,79347	1,63484	1,98165	1,92363
Dernière force de vie $1 : \alpha(\omega)$	1,64812	1,39406	1,39837	1,27468	1,54519	1,49985
Dernier âge $\bar{\omega}$	98,73950	100,46457	99,46558	102,28347	99,08998	101,27850

La valeur inverse de la dernière intensité de mortalité est appelée la *dernière force de vie*. Ces valeurs se trouvent dans les dernières lignes du tableau VII. Les derniers âges des hommes sont inférieurs à ceux des femmes. Les valeurs pour l'ensemble se tiennent entre les valeurs pour les deux sexes séparés. D'ailleurs les intensités de mortalité sont encore inférieures à 1.

Ces valeurs permettent de calculer les distributions théoriques correspondantes aux observations. Celles-ci sont nécessairement discontinues, tandis que la théorie suppose des valeurs continues. La méthode la plus simple est de comparer, non la distribution, mais les fréquences cumulatives. Les valeurs observées sont données dans le tableau VIII et représentées dans les figures (4)-(10).

VIII. — *Fréquences observées du plus grand âge.*

Plus grand âge (1)	Hommes		Femmes		Population entière	
	Suisse (2)	Suède (3)	Suisse (4)	Suède (5)	Suisse (6)	Suède (7)
96	1	0	0	0	0,5	0,0
97	9	0	3	0	6	0,0
98	48	1	9	0	13,5	0,5
99	28	8	18	1	23	4,5
100	39	21	31	3	35	12,0
101	44	30	43	9	43,5	19,5
102	46	42	51	20	48,5	31,0
103	53	44	52	32	52,5	38,0
104	54	48	54	42	54	45,0
105	55	52	54	48	54,5	50,0
106	55	52	55	52	55	52,0

Les valeurs théoriques correspondant au tableau VIII sont les $W(x)$ de la formule (44), multipliés par le nombre d'années envisagées k . Puisque les deux constantes seront différentes pour des séries différentes d'observations, il faudrait refaire pour chacune d'elles le calcul des valeurs théoriques. Mais on peut éviter ce travail en faisant usage des probabilités $W(x)$, calculées une fois pour toutes dans le tableau V, en fonction de la variable y , définie par (41). Pour des valeurs choisies de y on connaît la probabilité

pour que le dernier âge soit inférieur à x . On calculera seulement les valeurs correspondantes de x par les transformations linéaires

$$x = \tilde{\omega} + \frac{y}{u(\tilde{\omega})} \quad (49)$$

où les valeurs $\tilde{\omega}$ et $1 : \mu(\tilde{\omega})$ seront tirées des dernières lignes du tableau VII.

Le tableau IX donne les valeurs théoriques comparables aux observations du tableau VIII. Les âges des colonnes 2, 3, 4 correspondent à la colonne 1, les nombres de la colonne 5 correspondent aux nombres des colonnes 2, 4, 6 du tableau précédent.

IX. — *Probabilités des plus grands âges en Suisse (1879-1933).*

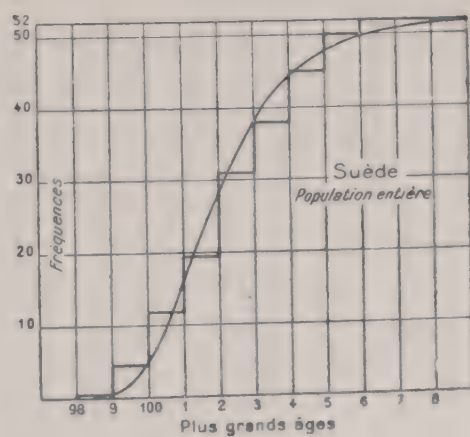
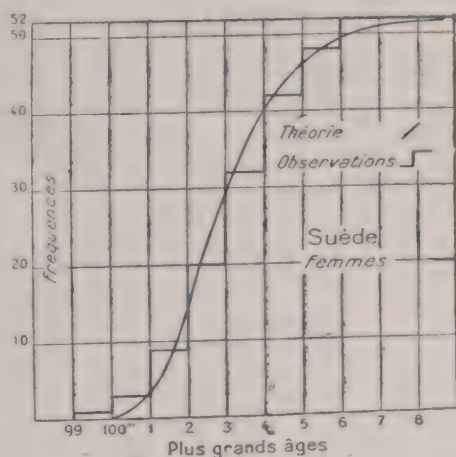
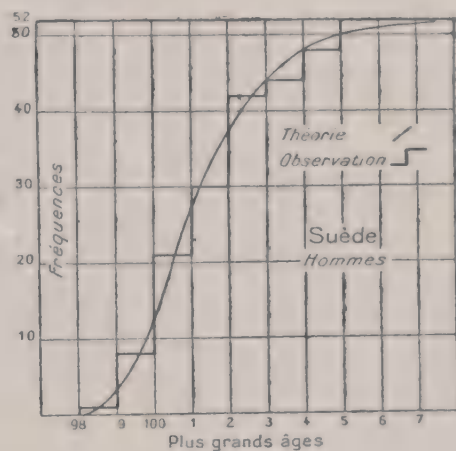
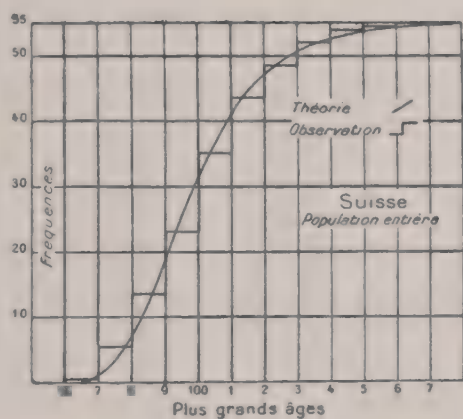
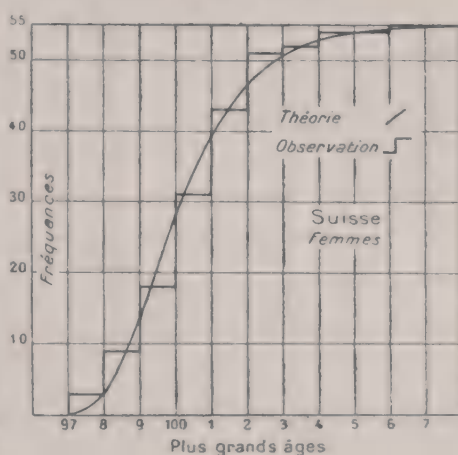
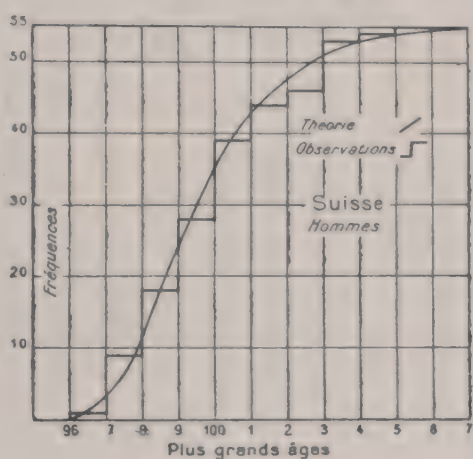
Variable de la distribution finale y (1)	Plus grands âges x			Fréquences absolues $kW(x)$ (5)
	Hommes	Femmes	Ensemble	
	(2)	(3)	(4)	
— 1,5	96,27	97,37	96,77	0,62
— 1,0	97,09	98,07	97,55	3,63
— 0,5	97,92	98,77	98,32	10,58
0	98,74	99,47	99,09	20,23
0,5	99,56	100,16	99,86	29,99
1,0	100,39	100,86	100,64	38,07
1,5	101,21	101,56	101,41	44,00
2,0	102,04	102,26	102,18	48,04
2,5	102,86	102,96	102,95	50,67
3,0	103,68	103,66	103,73	52,33
3,5	104,51	104,36	104,50	53,36
4,0	105,33	105,06	105,27	54,00
4,5	106,16	105,76	106,04	54,39
5,0	106,98	106,46	106,82	54,63
5,5	107,80	107,16	107,59	54,78

Dans les figures 4 à 6 on a comparé les valeurs observées du tableau VIII aux valeurs théoriques du tableau IX. L'accord est satisfaisant.

De la même manière ont été établies les valeurs correspondantes pour la Suède. On obtient d'après le tableau VII, colonnes 3, 5, 7 les plus grands âges des hommes par

$$x = 100,46457 + 1,39406 y \quad (49')$$

Probabilités totales et fréquences observées des plus grands âges en Suisse 1879-1933, et en Suède 1881-1932.



et pour les femmes par

$$x = 103,01923 + 1,27468 y \quad (49'')$$

enfin pour la population entière par

$$x = 102,14423 + 1,49985 y \quad (49''')$$

Les fréquences correspondantes sont les valeurs de $52 W(x)$ tirées du tableau V. La comparaison graphique entre les fréquences observées et théoriques (fig. 7 à 9) montre un accord satisfaisant.

En conclusion : il est légitime de nier l'existence d'un âge limite fixe et de traiter la distribution des décès sur les âges comme illimitée. Ce résultat a été atteint sans aucune hypothèse spéciale sur la variation de la mortalité avec les âges. Notre seule hypothèse générale a été d'admettre que l'égalité limite fournie par la règle de L'Hopital peut être considérée comme déjà suffisamment exacte pour les âges élevés.

FORMULE DE LEXIS ET OBSERVATIONS AMÉRICAINES

Afin de calculer le dernier âge pour une population donnée à l'aide des équations (35), il faut choisir une certaine formule biométrique. Dans ce qui suit nous employons d'abord la formule de Lexis.

Soit de nouveau τ , formule (32), le dernier âge réduit de sorte que $\tilde{\omega}$, formule (37), est le dernier âge. Pour déterminer la valeur τ à l'aide de (35), on n'a qu'à employer la valeur (19) de la distribution des décès $g(x)$. On obtient

$$-\frac{g'(\tilde{\omega})}{g(\tilde{\omega})} = \frac{2\tau}{\pi e(\xi)}.$$

On tire immédiatement de (35)

$$Nl(\xi) = \tau e^{\frac{\tau^2}{\pi}} \quad (50)$$

L'emploi de cette formule est légitime d'après (34) et (21), pourvu que

$$l(\tilde{\omega}) = l(\xi) \left(1 - \Phi\left(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\right)\right) \ll 1$$

Pour $\tau = 2,4 \sqrt{\pi} \quad (25)$

on obtient à l'aide des tables usuelles de l'intégrale de Gauss

$$l(\tilde{\omega}) = l(\xi) \cdot 6,9 \cdot 10^{-4}$$

résultat qui vérifie suffisamment notre condition (34). Car on ne néglige que 0,17 0/00. Le nombre d'observations doit donc être

$$Nl(\xi) \geq 1333$$

ce qui permet d'employer notre calcul du dernier âge pour toutes les tables. En pratique on tire le dernier âge réduit à l'aide de

$$\log Nl(\xi) = 0,13824 \tau^2 + \log \tau \quad (51)$$

en déterminant le nombre d'observations $Nl(\xi)$ pour des valeurs choisies du dernier âge réduit τ .

Pour obtenir l'âge limite on calcule d'abord la dernière intensité de mortalité d'après (23)

$$\mu(\tilde{\omega})e(\xi) = \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{2\tau^2}{\pi} \right) \quad (52)$$

D'après (25) on aura

$$\mu(\tilde{\omega}) > \frac{4,8}{e(\xi)}.$$

La dernière intensité de mortalité surpasse donc 0,8. On tire de (42') l'âge limite réduit

$$\bar{t} = \tau + \frac{e\tau}{1 + \frac{2\tau^2}{\pi}} \quad (53)$$

Enfin, on déduit l'écart type réduit à l'aide de (43'')

$$\frac{\sigma}{e(\xi)} = \frac{\pi^2}{\sqrt{6}} \frac{\tau}{\pi + 2\tau^2} \quad (54)$$

La première colonne du tableau X contient le dernier âge réduit τ , la seconde le logarithme correspondant du nombre d'observations $Nl(\xi)$, calculé à l'aide de (51). La troisième colonne contient le nombre d'observations $Nl(\xi)$ lui-même. D'après (53) on obtient l'âge limite réduit (colonne 4). Enfin (54) sert au calcul de l'écart type réduit $\frac{\sigma}{e(\xi)}$ (colonne 5).

Le dernier âge réduit croît très lentement avec N . Car si le nombre d'observations augmente de 4.000 à 400.000, c'est-à-dire 100 fois, le facteur multiplicatif n'augmente que d'à peu près 28 0/0. Notre supposition fondamentale qu'un âge limite n'existe pas, ne se heurte donc à aucune difficulté pratique. Il faudrait des nombres d'observations fantastiques pour que des âges extraordinaires puissent être observés.

Puisque le dernier âge réduit augmente d'une façon assez lente,

l'écart type réduit dépend du nombre d'observations d'une manière faible. Pour 1.300 observations il est de l'ordre de 10 0/0 de l'âge limite réduit. Pour 40 millions, il diminue à 4 0/0.

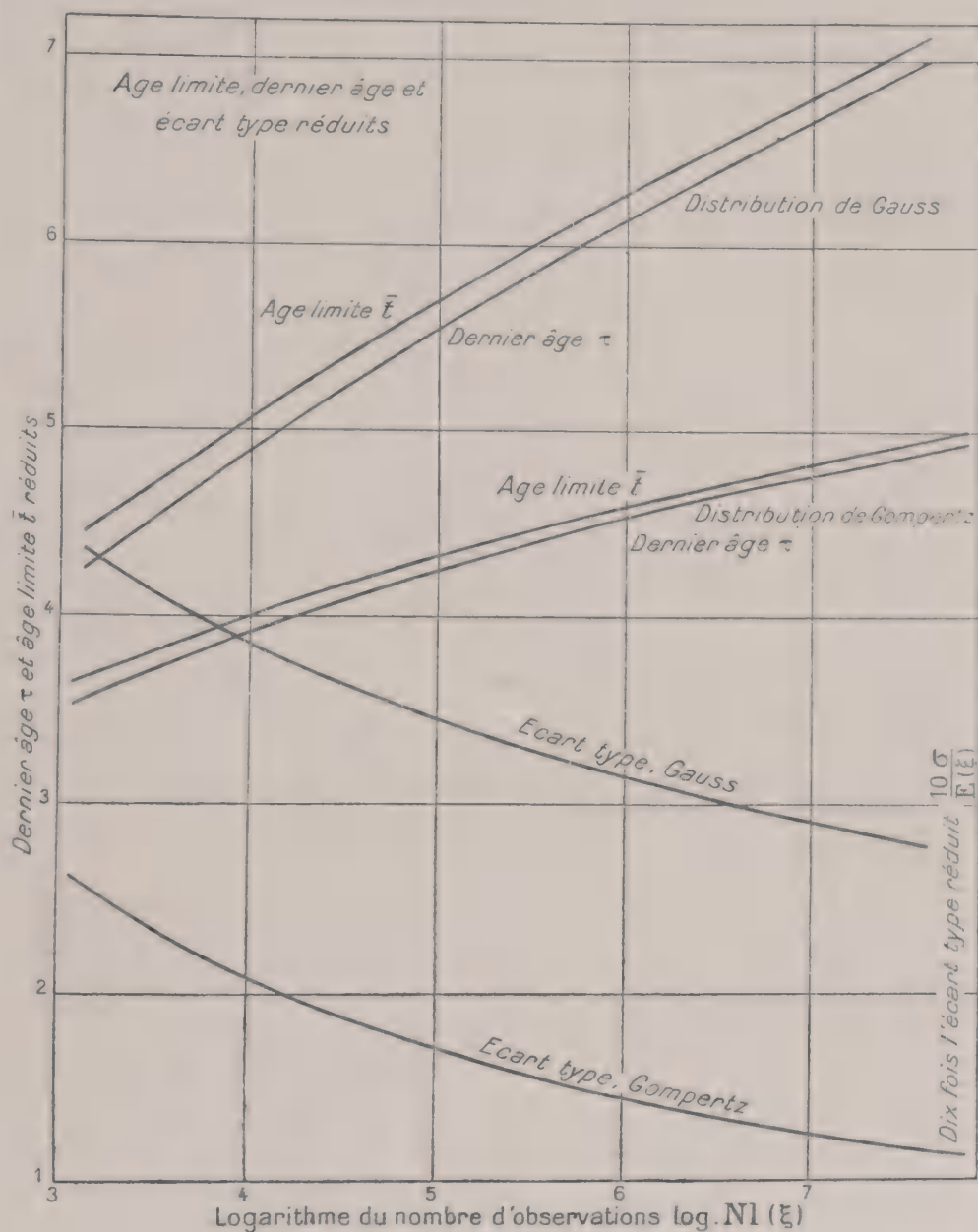


FIG. 10.

Les valeurs réduites du dernier âge, de l'écart type et de l'âge limite sont données dans la figure (10) en fonction du logarithme du nombre d'observations. Elle montre que le dernier âge et l'âge limite réduit sont assez proches et qu'ils augmentent d'une

façon sensiblement linéaire. Leur différence, fonction décroissante, est presque indépendante du nombre d'observations.

Notons en passant que le tableau X résoud le problème général de la plus grande valeur d'une distribution de Gauss, problème posé par L. von Bortkiewicz (2, 3) pour de petits nombres d'observations, et résolu par R. de Misès pour de très grands nombres d'observations. Pour un nombre d'observations (colonne 3) s'étendant de $1,3.10^3$ à $41,6.10^6$, on tire de la colonne (1) la plus grande valeur la plus probable de la variable initiale réduite par son écart moyen ; de la colonne (4) l'espérance mathématique de la plus grande valeur et de la colonne (5) l'écart type de la distribution de la plus grande valeur réduite par l'écart moyen de la distribution initiale. L'introduction de l'écart moyen au lieu de l'écart type, usuel, était nécessaire parce que c'est le premier qui a une signification biométrique simple.

Pour appliquer la théorie du plus grand âge à une population donnée il suffit de déterminer les trois valeurs normales. En plus il faut tirer des registres de l'état civil le nombre des décès N qui a été employé pour la construction de la table, pour connaître le nombre d'observations $N/(\xi)$. On déterminera le facteur multiplicatif τ à l'aide du tableau X et on aura le dernier âge à l'aide de (37). Puis on va calculer l'intervalle $\omega \mp \sigma$ pour comparer le résultat avec l'âge observé auquel l'individu le plus âgé est décédé. Nous désignons cette grandeur par $[\omega']$. Car on ne connaît le plus grand âge qu'en nombres entiers.

Toutes ces valeurs sont données d'une façon systématique dans la publication de Glover pour 36 tables américaines, énumérées dans la première colonne du tableau XI.

La détermination du plus grand âge observé se heurte quelquefois à la difficulté que les observations n'étaient pas encore terminées. Par exemple, pour la table « White native female 1910 », la dernière femme était morte entre 111 et 112 ans, tandis qu'il y avait encore une femme vivante à 114 ans. Dans de tels cas, nous avons supposé qu'elle devait être morte au bout d'un an, ce qui permet d'établir $[\omega'] = 114$.

Nous ne pouvons pas entrer ici dans la critique des observations. Pourtant nous ne pouvons pas supprimer la remarque que ces valeurs (tabl. XI, col. 8) nous semblent être un peu élevées.

Les différentes tables ne sont pas indépendantes les unes des

X. — *Dernier âge, âge limite et écart type réduits,
pour la formule de Lexis.*

Dernier âge réduit τ (1)	Logarithme du nombre d'observations $\log Nl(\xi)$ (2)	Nombre d'observations $Nl(\xi)10^{-3}$ (3)	Age limite réduit \bar{t} (4)	Ecart type réduit $\frac{\sigma}{e(\xi)}$ (5)
4,25	3,12535	4,335	4,446	0,436
4,30	3,18953	4,547	4,494	0,432
4,35	3,25434	4,796	4,542	0,428
4,40	3,31978	2,088	4,591	0,424
4,45	3,39072	2,459	4,639	0,419
4,50	3,45258	2,835	4,687	0,415
4,55	3,51993	3,311	4,735	0,412
4,60	3,58792	3,872	4,783	0,408
4,65	3,65655	4,535	4,832	0,404
4,70	3,72582	5,319	4,880	0,400
4,75	3,79574	6,248	4,928	0,397
4,80	3,86630	7,350	4,978	0,393
4,85	3,93750	8,660	5,025	0,389
4,90	4,00934	10,22	5,074	0,386
4,95	4,08184	12,10	5,122	0,382
5,00	4,15498	14,29	5,171	0,379
5,05	4,22876	16,93	5,219	0,376
5,10	4,30320	20,10	5,268	0,373
5,15	4,37828	23,89	5,316	0,369
5,20	4,45402	28,51	5,365	0,366
5,25	4,53041	33,92	5,413	0,363
5,30	4,60744	40,50	5,462	0,360
5,32	4,63844	43,50	5,481	0,359
5,34	4,66954	46,73	5,501	0,358
5,36	4,70075	50,21	5,520	0,356
5,38	4,73206	53,96	5,540	0,355
5,40	4,76348	58,01	5,559	0,354
5,42	4,79500	62,37	5,579	0,353
5,44	4,82663	67,09	5,598	0,352
5,46	4,85836	72,17	5,618	0,351
5,48	4,89019	77,65	5,637	0,349
5,50	4,92213	83,59	5,657	0,348
5,52	4,95417	89,99	5,676	0,347
5,54	4,98632	96,90	5,696	0,346
5,56	5,01858	104,4	5,715	0,345
5,58	5,05094	112,4	5,735	0,344
5,60	5,08340	121,2	5,754	0,343
5,62	5,11597	130,6	5,774	0,341
5,64	5,14865	140,8	5,793	0,340
5,66	5,18143	151,9	5,813	0,339
5,68	5,21431	163,8	5,832	0,338
5,70	5,24730	176,7	5,852	0,337
5,75	5,33023	213,9	5,901	0,334
5,80	5,41383	259,3	5,949	0,332
5,85	5,49808	314,8	5,998	0,329
5,90	5,58299	382,8	6,047	0,327
5,95	5,66857	466,2	6,096	0,324
6,00	5,75480	568,6	6,145	0,322
6,50	5,65356	4504	6,634	0,299
7,00	7,61887	41579	7,126	0,279

autres. Car les individus les plus âgés des différentes tables sont les mêmes. Pour éviter cet écueil, on a rangé les tables par groupes, de sorte que, dans chacun, toutes les tables sont indépendantes les unes des autres, tandis que les différentes tables dans différents groupes ont des populations communes.

Pour maintes tables, une difficulté provient du fait que l'âge le plus élevé avait été atteint par un noir. D'après l'opinion usuelle, on ne peut pas prêter une grande confiance aux registres établis pour les noirs. C'est pourquoi nous traitons d'abord les tables des populations blanches, ensuite les populations dites mixtes, en dernier les nègres.

Pour les blancs et pour les nègres nous devons accepter les plus grandes valeurs observées. Pour les populations mixtes, les nombres d'observations portant sur les nègres sont négligeables par rapport aux nombres portant sur les blancs. Voilà pourquoi il est légitime de considérer pour ces populations, qui pratiquement sont blanches, seulement les plus grands âges atteints par les blancs.

Pour la population de New-York, hommes, le plus âgé affirmant avoir 135 ans était nègre, tandis que l'âge au décès du dernier blanc était 110 ans, valeur que nous avons choisie pour $[\omega']$. Pour Michigan, hommes, il y avait un décès à 115 ans. Cet homme n'était ni blanc ni nègre ; donc un homme d'autre couleur. Voilà pourquoi nous avons choisi comme plus grand âge celui de dernier blanc décédé à 110 ans. Enfin pour la table Indiana, femmes, 1910, le plus grand âge observé de 120 ans était celui d'une négresse. Voilà pourquoi nous avons choisi comme valeur de $[\omega']$ l'âge du blanc précédent, à savoir 115 ans.

La première colonne du tableau XI indique la population traitée, la deuxième le nombre des décès employé pour la construction de la table. En multipliant cette valeur avec la probabilité normale (tableau II, col. 6 et 7 ; tableau III, colonne 4) on obtient le nombre d'observations (colonne 3). A l'aide du tableau X on calcule par interpolation le dernier âge réduit (colonne 4). Enfin la colonne 5 contient le dernier âge lui-même calculé à l'aide des valeurs normales (tableau II, colonnes 2 à 5 ; tableau III, colonnes 2 et 3) par la formule (37). La colonne suivante (6) contient l'écart type. On en déduit l'intervalle $\bar{\omega} \mp \sigma$ (colonne 7) pour lequel existe une probabilité de 70 0/0 afin qu'il contienne le plus

XI. — *Le dernier âge pour quelques tables américaines.**Théorie et observations.*

Population	Nombres de décès N	Nombres d'obser- vations $Nl(\xi)10^{-3}$	Dernier âge réduit τ	Dernier âge $\bar{\omega}$	Ecart type σ	Inter- valle $\omega \pm \sigma$	Plus grand âge $[\omega']$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
<i>Population totale blanche d'après le sexe et l'origine 1901 et 1910</i>							
Native f. 01 . . .	336.967	75,406	5,472	112,68	2,21	110..114	112
Native m. 01 . . .	374.181	80,658	5,490	111,87	2,26	109..114	119
Foreign born f. 01.	119.693	37,982	5,281	114,06	2,90	111..116	114
Foreign born m. 01.	132.467	32,321	5,235	110,78	2,58	108..113	111
Native f. 10 . . .	359.086	88,795	5,516	113,19	2,27	110..115	114
Native m. 10 . . .	408.658	89,913	5,520	112,06	2,28	109..114	109
Foreign born f. 10.	137.292	48,155	5,348	114,82	2,91	111..117	117
Foreign born m. 10.	159.003	52,366	5,372	114,85	2,95	111..117	111
<i>Population totale blanche d'après le sexe 1901; citadine et rurale 1910</i>							
f. 01.	456.660	108,658	5,571	114,91	2,42	112..117	114
m. 01.	506.648	107,850	5,569	113,04	2,35	110..115	119
Rural f. 10. . . .	182.947	53,091	5,371	112,79	2,40	110..115	114
Rural m. 10. . . .	208.360	55,040	5,386	111,46	2,32	109..113	111
Cities f. 10. . . .	313.431	92,283	5,527	117,65	2,89	114..120	117
Cities m. 10. . . .	359.301	100,471	5,550	116,97	3,01	113..119	110
<i>Population totale blanche 1910</i>							
f. 10.	496.378	145,032	5,648	117,26	2,62	114..119	117
m. 10.	517.661	133,911	5,627	114,12	2,43	111..116	111
<i>Population totale blanche 1901-10</i>							
f..	1.578.069	408,404	5,931	118,04	2,16	115..120	125
m..	1.786.656	380,415	5,889	114,86	2,37	112..117	131
<i>Populations mixtes de quelques Etats 1910</i>							
Indiana f.	49.945	15,853	5,030	111,87	2,79	109..114	115
— m.	56.232	14,494	5,004	108,64	2,45	106..111	109
Massachusetts f. .	76.422	19,904	5,097	112,34	2,74	109..115	108
— m.	81.978	25,182	5,164	115,02	3,25	111..118	109
Michigan. f. . . .	51.940	15,235	5,018	110,97	2,64	108..113	114
— m.	62.201	16,312	5,038	109,07	2,50	106..111	110
New Jersey f.. . .	52.776	13,350	4,979	110,49	2,72	107..113	110
— m.. . . .	61.655	11,776	4,941	107,47	2,50	104..109	106
New York f. . . .	199.907	59,334	5,406	116,52	2,91	113..119	117
— m.	233.498	59,255	5,406	115,33	2,91	112..118	110
<i>Populations nègres</i>							
f. 01.	14.518	2,920	4,509	115,30	4,48	110..119	112
m. 01.	14.988	4,158	4,622	121,10	5,64	115..126	128
f. 10.	15.853	4,981	4,678	121,73	5,47	116..127	120
m. 10.	17.471	4,331	4,635	114,88	4,87	110..119	135
Columbia f. 05/10.	7.872	1,425	4,271	109,80	4,66	105..114	120
Columbia m. 05/10	8.272	1,580	4,307	103,38	4,56	98..107	106
f. 01/10.	51.917	10,324	4,903	118,67	4,12	114..122	120
m. 01/10.	55.456	10,181	4,900	114,25	3,93	110..118	135

grand âge. Puisque le plus grand âge observé (colonne 8) n'est connu qu'en nombres entiers, l'intervalle est donné de la même manière. Nous dirons que la valeur théorique est égale à la valeur observée, si cette égalité a lieu pour les plus grands nombres entiers contenus dans ces deux chiffres.

Chacune de ces valeurs $[\omega']$ ne correspond donc qu'à une seule observation, laquelle porte sur une distribution dont nous avons calculé la dominante. Or ce serait trop demander qu'une seule observation faite sur une distribution soit identique à la valeur la plus probable.

Le premier groupe du tableau XI contient huit observations indépendantes. A l'exception d'une, toutes les observations sont contenues dans l'intervalle $\tilde{\omega} \mp \sigma$, tandis que la théorie prévoit que cet intervalle peut être surpassé deux fois (formule 45).

Dans le second groupe qui contient six tables indépendantes, il y a trois égalités entre la théorie et les observations. Une fois la valeur calculée est trop grande, deux fois la valeur observée surpasse l'intervalle, ce qui s'accorde avec la théorie.

Dans le groupe suivant une valeur sur deux est égale aux observations. Les deux valeurs se trouvent dans l'intervalle $\tilde{\omega} \mp \sigma$. Les deux valeurs calculées qui suivent sont trop petites. Les deux observations surpassent même l'intervalle. Mais on pourrait élever des doutes à l'égard de ces deux valeurs observées qui surpassent de beaucoup toutes les autres.

Si l'on considère l'ensemble des populations blanches on constate qu'il est arrivé cinq fois parmi 18 populations que le plus grand âge observé soit extérieur à l'intervalle $\tilde{\omega} \mp \sigma$, valeur égale à ce que la théorie prévoit.

L'accord est moins bon pour les populations mixtes, pour lesquelles nous avons calculé douze valeurs indépendantes. Le nombre d'observations est en général inférieur à celui des tables étudiées auparavant. L'on ne trouve qu'un cas dans lequel le chiffre théorique soit identique au chiffre observé. L'intervalle $\tilde{\omega} \mp \sigma$ est cinq fois surpassé, tandis que la théorie prévoit trois fois.

Le dernier groupe contient huit populations noires. On est frappé tout de suite par le fait qu'il arrive cinq fois sur huit valeurs que le dernier âge finisse par 5 ou 0. Aucune des valeurs théoriques n'est égale aux observations. Dans la moitié des cas les observations sont extérieures à l'intervalle $\tilde{\omega} \mp \sigma$. La théorie ne

fait prévoir que 30 0/0. Ce désaccord confirme l'opinion usuelle suivant laquelle les observations portant sur les nègres ne sont pas dignes de foi.

Mais il y a aussi un point nouveau. Notre théorie nous mène à l'affirmation d'une supériorité des derniers âges des nègres. Cela tient à ce que leurs tables sont défavorables. Pour les populations 1901, 1910, 1901-10 et les deux sexes, notre théorie nous fait prévoir que trois fois le dernier âge des nègres surpasse celui des blancs, tandis qu'il y aurait trois fois égalité entre ces valeurs théoriques. Les observations montrent quatre fois des valeurs supérieures pour les nègres et deux fois des valeurs supérieures pour les blancs, correspondance qu'on peut accepter comme une certaine confirmation de notre théorie. La supériorité des nègres subsiste quoique ces nombres d'observations ne soient que 2 0/0 des observations faites sur les blancs. Pour le même nombre d'observations on obtient pour les nègres des derniers âges virtuels qui tous surpassent les derniers âges des blancs.

Mais il faut observer que cette comparaison est basée sur la supposition que les tables des nègres peuvent être représentées par la même formule que celles des blancs. En réalité la représentation des tables pour les nègres par la formule de Lexis est moins bonne que celle des blancs. Il en résulte que la supériorité réelle des nègres du point de vue de longévité sera moindre que le fait prévoir la théorie de Lexis.

En somme la théorie est pleinement vérifiée pour les bonnes observations. L'accord entre la théorie et les observations est d'autant plus mauvais que les observations deviennent plus douteuses.

Tous ces raisonnements et leurs résultats valent ce que valent les observations et l'outil que nous avons employé. Puisque les observations sont assez incertaines, on doit s'attendre seulement à un accord pour l'ordre de grandeur des valeurs calculées et observées. Si, comme il est peut-être légitime de supposer, les valeurs observées sont excessives, ce serait notre théorie qui en profiterait. Car pour 20 sur 36 tables les observations surpassent la théorie.

VI

FORMULE DE GOMPERTZ ET HISTORIQUE DU PLUS GRAND AGE EN SUÈDE

Les valeurs observées du plus grand âge aux Etats-Unis étaient assez élevées. Voilà pourquoi la détermination du dernier âge était basée sur la formule de Lexis. Comme deuxième exemple d'une formule capable d'une détermination numérique du dernier âge, nous allons traiter la formule de Gompertz. Notre raisonnement sera tout à fait analogue à celui du chapitre précédent. Mais il sera basé cette fois sur la formule (35'').

D'après la fonction de survie (28') et d'après (26'), on tire de (35'')

$$Nl(\xi) = e^{-1 + e^{p\tau}} (1 - e^{-p\tau})$$

ou

$$\log Nl(\xi) = \log e (-1 + e^{p\tau} + lg(1 - e^{-p\tau})) \quad (55)$$

Développons le second facteur et négligeons, par rapport au plus grand terme $e^{p\tau}$, les termes qui suivent le premier. Cela mène à la formule simple

$$\log Nl(\xi) = 2 \log e \left(\text{Sh} p\tau - \frac{1}{2} \right)$$

(56)

où Sh signifie le sinus hyperbolique. La forme finale de τ en fonction de $Nl(\xi)$ a été donnée par M. E. L. Dodd. L'emploi de (56) est lié à deux conditions. L'une (34) exige

$$l(\xi)e^{1 - e^{p\tau}} \ll 1.$$

L'autre exige de poser

$$\lg (1 - e^{-p\tau}) = -e^{-p\tau}.$$

La seconde condition devient plus importante dès que l'on a

$$p\tau > 1,81 \quad (57)$$

Car à partir de cette valeur, on aura

$$e^{e^{p\tau}} > 2 e^{3p\tau}.$$

L'on obtient alors

$$e^{e^{p\tau}} > 450.$$

On peut considérer ce nombre comme très grand par rapport à un, ce qui vérifie (34). Le nombre d'observations correspondant devient à l'aide de (56)

$$\log Nl(\xi) = 2,14835$$

ce qui permet le calcul du dernier âge pour tous les nombres d'observations usuels dans la construction des tables de mortalité.

Pour connaître l'âge limite réduit on calcule d'après (26') la dernière intensité de mortalité par

$$\mu(\tilde{\omega})e(\xi) = pe^{p\tau} \quad (58)$$

ou la dernière force de vie

$$\frac{1}{\mu(\tilde{\omega})} = \frac{e(\xi)}{p} e^{-p\tau} \quad (59)$$

dont on tire, à l'aide de (42'), l'âge limite réduit

$$\bar{t} = \tau + \frac{c}{p} e^{-p\tau} \quad (60)$$

Enfin on aura l'écart type réduit à l'aide de (43'')

$$\frac{\sigma}{e(\xi)} = \frac{\pi}{p\sqrt{6}} e^{-p\tau} \quad (61)$$

Le tableau XII contient (première colonne) les valeurs de $p\tau$, la seconde donne les valeurs correspondantes de $\log Nl(\xi)$ calculées à l'aide des Smithsonian Mathematical Tables d'après (56). La troisième colonne contient le dernier âge réduit τ . La formule (60) fournit l'âge limite réduit (colonne 4). Enfin l'écart type réduit est calculé d'après (61) (colonne 5).

XII. — *Dernier âge, âge limite et écart type réduits
pour la formule de Gompertz.*

Dernier âge réduit multiplié par p $p\tau$ (1)	Logarithme du nombre d'observations $\log Nl(\xi)$ (2)	Dernier âge réduit τ (3)	Âge limite réduit \bar{t} (4)	Ecart type réduit $\frac{\sigma}{e(\xi)}$ (5)
2,10	3,05905	3,521	3,640	0,263
2,15	3,24348	3,605	3,718	0,251
2,20	3,43710	3,689	3,796	0,238
2,22	3,51723	3,723	3,828	0,234
2,24	3,59895	3,756	3,859	0,229
2,26	3,68227	3,790	3,891	0,224
2,28	3,76724	3,823	3,922	0,220
2,30	3,85389	3,857	3,954	0,216
2,31	3,89786	3,874	3,970	0,213
2,32	3,94227	3,890	3,985	0,211
2,33	3,98710	3,907	4,001	0,209
2,34	4,03238	3,924	4,017	0,207
2,35	4,07811	3,941	4,033	0,205
2,36	4,12430	3,957	4,049	0,203
2,37	4,17092	3,974	4,065	0,201
2,38	4,21802	3,991	4,081	0,199
2,39	4,26558	4,008	4,096	0,197
2,40	4,31364	4,025	4,112	0,195
2,41	4,36212	4,041	4,128	0,193
2,42	4,41110	4,058	4,144	0,191
2,43	4,46057	4,075	4,160	0,190
2,44	4,51053	4,092	4,176	0,187
2,45	4,56099	4,108	4,192	0,186
2,46	4,61194	4,125	4,208	0,184
2,47	4,66339	4,142	4,224	0,182
2,48	4,71536	4,159	4,240	0,180
2,49	4,76784	4,175	4,256	0,178
2,50	4,82084	4,192	4,272	0,177
2,51	4,87437	4,209	4,288	0,175
2,52	4,92844	4,226	4,304	0,173
2,53	4,98303	4,242	4,320	0,171
2,54	5,03816	4,259	4,336	0,170
2,55	5,09385	4,276	4,352	0,168
2,56	5,15009	4,293	4,368	0,166
2,57	5,20688	4,310	4,384	0,165
2,58	5,26424	4,326	4,400	0,163
2,59	5,32218	4,343	4,416	0,161
2,60	5,38067	4,360	4,432	0,160
2,61	5,43976	4,377	4,448	0,158
2,62	5,49944	4,393	4,464	0,157
2,63	5,55976	4,410	4,480	0,155
2,64	5,62057	4,427	4,496	0,153
2,65	5,68204	4,444	4,512	0,152
2,66	5,74413	4,461	4,528	0,150
2,67	5,80683	4,477	4,544	0,149
2,68	5,87016	4,494	4,560	0,147
2,69	5,93411	4,511	4,576	0,146
2,70	5,99870	4,528	4,593	0,145
2,72	6,12982	4,561	4,625	0,142
2,74	6,26358	4,595	4,657	0,139
2,76	6,40001	4,628	4,689	0,136
2,78	6,53916	4,662	4,722	0,133
2,80	6,68112	4,695	4,754	0,131
2,85	7,04857	4,779	4,835	0,124
2,90	7,43474	4,863	4,916	0,118
2,95	7,84059	4,947	4,997	0,113
3,00	8,26712	5,031	5,078	0,107

La figure (10) contient les trois valeurs réduites en fonctions du logarithme du nombre d'observations. Le dernier âge donné par la formule de Gompertz est inférieur à celui tiré de la formule de Lexis, fait que nous avons prévu en comparant les fonctions de

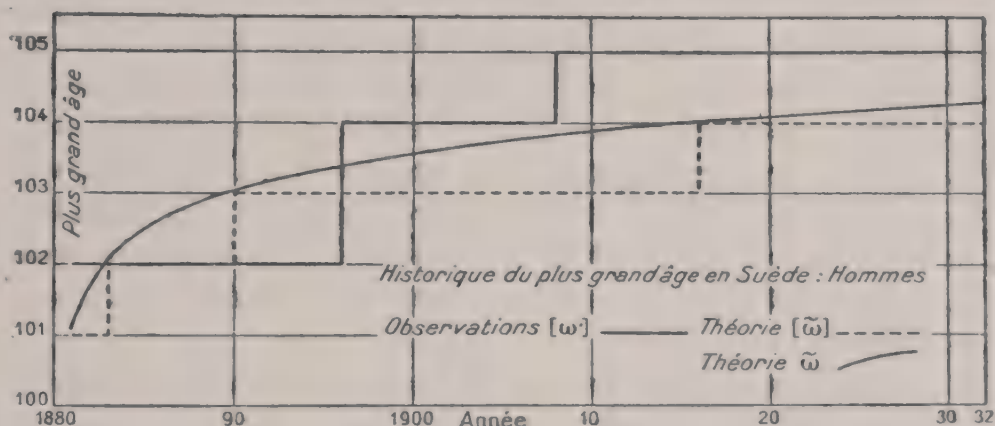


FIG. 11.

survie. L'écart type réduit est seulement la moitié de celui calculé pour la formule de Lexis. L'âge limite s'approche sensible-

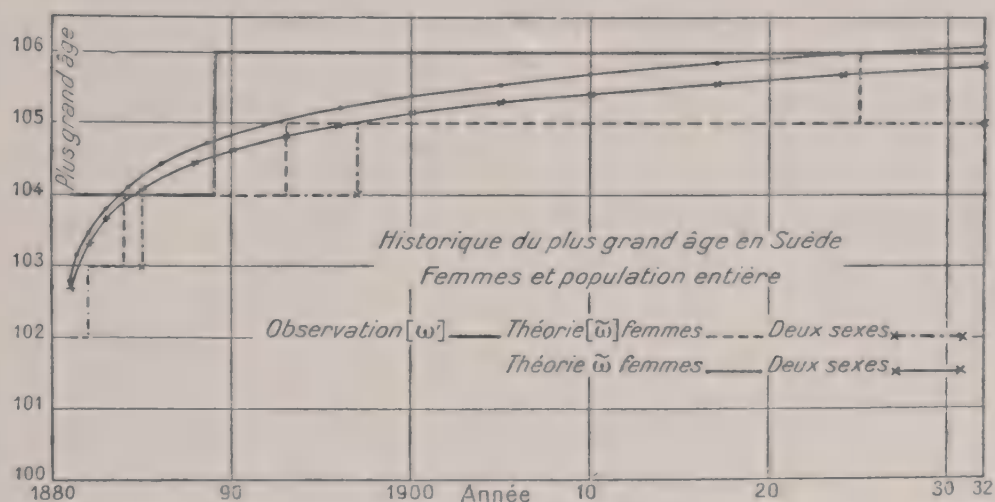


FIG. 12.

ment du dernier âge. Enfin ces deux valeurs augmentent d'une façon sensiblement linéaire, fait prévu par la théorie (15).

Nous allons faire usage du tableau XII pour comparer cette théorie avec les valeurs du plus grand âge observé jusqu'à une certaine époque.

Les figures (11) et (12) contiennent, d'après les données de la

figure (3), les plus grands âges observés en Suède jusqu'à une certaine époque pour les hommes et pour les femmes. Le plus grand âge dans la population entière se confond avec celui des femmes. Cette identité n'est pas contredite par le fait que la distribution du plus grand âge des femmes est différente de celle de la population entière. Car pour les distributions l'on emploie chaque valeur observée, tandis qu'ici l'on utilise, pour chaque année, seulement les plus grands âges observés jusqu'à cette époque. L'allure de ces courbes montre que le plus grand âge augmente avec le nombre d'observations, fait prévu par la théorie actuelle, et qui serait peu compatible avec l'existence d'un âge limite fixe. Les figures (11) et (12) contiennent en même temps les valeurs théoriques.

Celles-ci sont données par le procédé suivant : Calculons d'abord le dernier âge pour une année quelconque et pour les trois populations. D'après l'*Annuaire Statistique de la Suède*, de 1932, sont morts dans les 49 années 1881-1929 en moyenne par an $N = 39.215$ hommes et $N = 39.625$ femmes. La probabilité normale tirée du tableau I mène aux nombres d'observations $N/(\xi)$ dont les logarithmes sont contenus dans le tableau XIII. On obtient par interpolation les valeurs $p\tau$ (troisième colonne), dont on tire les derniers âges réduits τ (colonne 4) qui seront les facteurs multiplicatifs de (37). En introduisant l'âge normal et la vie normale (tableau I) on obtient les derniers âges (colonne 5). En outre on obtient la dernière force de vie par (59) et l'écart type par (61) (colonnes 6 et 7).

XIII. — Calcul du dernier âge d'une année en Suède.

Sexe	$\log N/(\xi)$	$p\tau$	τ	ω	$1 : \mu(\omega)$	σ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Hommes . .	3,9557465	2,32308	3,896	101,09	0,95428	1,22
Femmes . .	4,0268975	2,33875	3,922	102,80	0,98989	1,27
Population .	4,2937470	2,39585	4,018	102,71	0,91431	1,16

On pourrait s'étonner de ce que les derniers âges et les intensités de mortalité diffèrent des valeurs calculées plus haut

(tableau VII). Mais ces deux séries de valeurs sont calculées d'après des observations tout à fait différentes. Pour la première ce sont seulement les plus grands âges qui ont été employés alors que pour la seconde, leur emploi a été évité. Puis, la première série ne repose sur aucune théorie analytique relative aux fonctions biométriques; la seconde suppose la validité de la formule de Gompertz. Etant donné ces différences de méthode et de source, on ne doit pas s'étonner de la différence des résultats.

Le nombre d'observations pour toute la population est à peu près le double du nombre des femmes. Mais l'âge normal et la vie normale pour toute la population sont moindres que ceux des femmes. Voilà pourquoi le dernier âge pour l'ensemble est moindre que celui des femmes.

Ces valeurs s'appliquent à une année quelconque. On peut les attribuer à l'année 1881 où commencent les observations. Pour calculer le dernier âge théorique en fonction du temps d'après les formules (36) et (37) on n'a qu'à prendre les logarithmes des sommes des observations faites jusqu'à une certaine époque. Au lieu de faire usage du nombre actuel des décédés, nous supposons que ce nombre a été constant pour toute la période, ce qui n'introduit qu'une erreur minime. Pour l'une quelconque des années suivantes $1881 + z$, le logarithme du nombre d'observations faites jusqu'à cette époque N_z sera

$$\log N_z / (\xi) = \log N_0 / (\xi) + \log z \quad (62)$$

où N_0 est le nombre des décès pour une année.

Le tableau XIV contient (colonne 2) le logarithme des nombres d'observations pour les hommes décédés jusqu'à une certaine époque. On en tire à l'aide du tableau XII, le dernier âge réduit τ_z correspondant à l'année z (colonne 3). On obtient donc le dernier âge des hommes par

$$\tilde{\omega}_z = 78,467 + 3,809 \tau_z \quad (63)$$

(colonne 4), des femmes (colonne 5) par

$$\tilde{\omega}_z = 78,799 + 6,121 \tau_z \quad (63')$$

et de la population entière (colonne 6) par

$$\tilde{\omega}_z = 78,667 + 3,985 \tau_z \quad (63'')$$

Enfin la colonne 7 contient l'écart type pour la population entière.

XIV. — *Les derniers âges en Suède, fonctions du temps.*

Année 1881 + z (1)	Logarithme du nombre d'observa- tions Hommes $\log N_z l(\xi)$ (2)	Dernier âge réduit Hommes τ_z (3)	Dernier âge			Ecart type σ_z (7)	Année 1932 - z (8)
			Hommes $\bar{\omega}_z$ (4)	Femmes $\bar{\omega}_z$ (5)	Popula- tion entière $\bar{\omega}_z$ (6)		
1881	3,95575	3,896	101,09	102,80	102,71	1,16	1932
1882	4,25678	4,004	101,73	103,46	103,32	1,11	1931
1883	4,43287	4,065	102,08	103,82	103,66	1,07	1930
1884	4,55781	4,107	102,33	104,08	103,89	1,03	1929
1885	4,65472	4,139	102,50	104,27	104,07	1,02	1928
1886	4,73390	4,165	102,66	104,42	104,22	1,00	1927
1887	4,80084	4,186	102,78	104,55	104,34	0,99	1926
1888	4,85884	4,204	102,89	104,66	104,44	0,99	1925
1889	4,90999	4,220	102,98	104,76	104,53	0,98	1924
1890	4,95575	4,234	103,05	104,84	104,61	0,97	1923
1893	5,06970	4,269	103,26	105,05	104,80	0,95	1920
1896	5,15987	4,296	103,41	105,21	104,95	0,94	1917
1900	5,25678	4,322	103,58	105,39	105,12	0,92	1913
1905	5,35369	4,352	103,74	105,56	105,31	0,90	1908
1910	5,43287	4,375	103,87	105,70	105,39	0,90	1903
1917	5,52395	4,400	104,03	105,85	105,55	0,88	1896
1924	5,59920	4,421	104,15	105,97	105,67	0,87	1889
1932	5,67175	4,441	104,27	106,10	105,79	0,87	1881

La courbe représentant ces valeurs théoriques est donnée par les figures (11) et (12). Quoique la théorie corresponde à une courbe continue, nous avons tracé également les valeurs théoriques d'une façon discontinue, comme se présentent les observations. Voilà pourquoi nous avons représenté, à côté des valeurs calculées $\bar{\omega}$, les plus grands nombres entiers $[\bar{\omega}]$ contenus dans ces valeurs. L'accord entre la théorie et les observations est bien satisfaisant.

D'ailleurs on pourrait aussi bien prendre 1932 comme année initiale et traiter les années 1932 à 1881. Dans ce cas le dernier âge augmente dans la même mesure, quoiqu'on retourne vers les temps passés. C'est à cette manière d'envisager les choses que s'applique la colonne 8 du tableau XIV qui contient les années 1932 - z . Le graphique (13) montre cet aspect rétrospectif pour la population entière. Ce développement, lui aussi, est en bon accord avec les observations.

Ce fait nous encourage à hasarder une prédiction. Supposons que le nombre annuel des décès ne doive pas varier dans le pro-

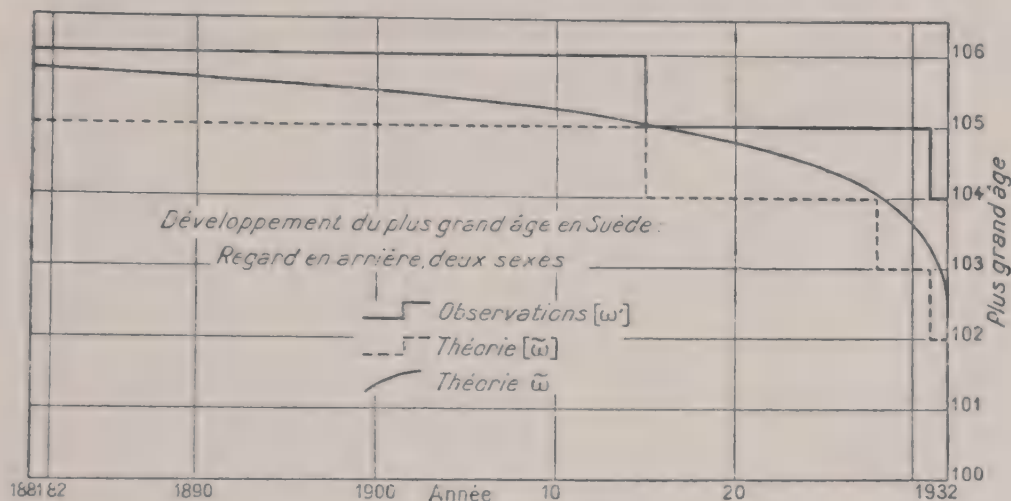


FIG. 13.

chain futur dans une proportion qui altère son ordre de grandeur, supposons en outre que l'âge normal et la vie normale restent de

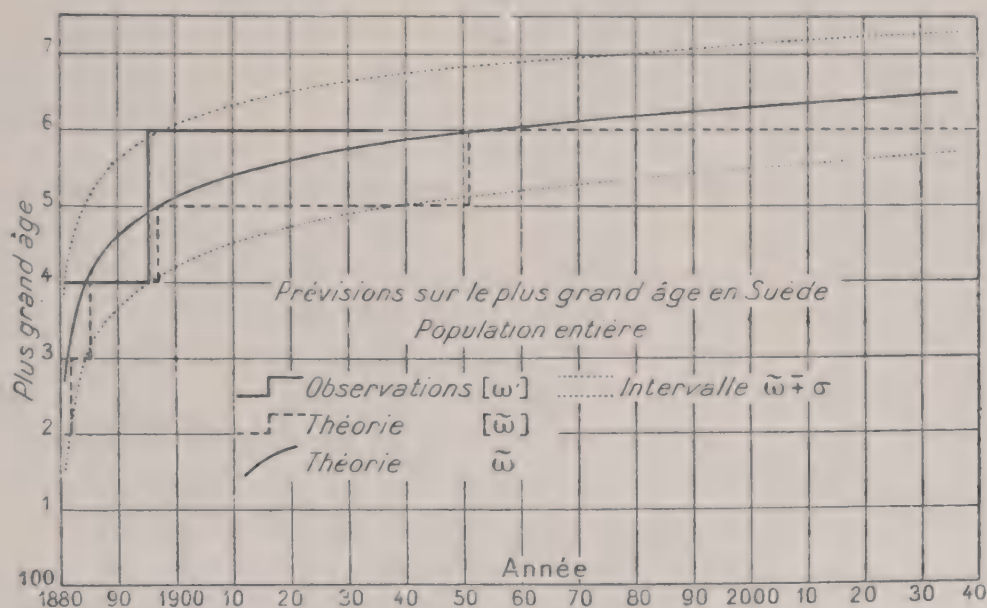


FIG. 14.

même à peu près invariables. L'on obtient alors pour toute la population les valeurs futures contenues dans le tableau XV et tracées dans la figure 14.

XV. — *Prévisions sur le plus grand âge en Suède.*

Année	Logarithme du nombre d'observa- tion	Dernier âge réduit multiplié par p	Dernier âge réduit	Dernier âge	Ecart type	Intervalle
$1881 + z$	$\log Nl(\xi)$	$p\tau$	τ	$\bar{\omega}$	σ	$\omega \pm \sigma$
1940	6,06460	2,71010	4,545	105,87	0,86	$105,01 \div 106,73$
1950	6,13260	2,72042	4,562	105,97	0,85	$105,12 \div 106,82$
1970	6,24314	2,73696	4,590	106,14	0,84	$105,30 \div 106,94$
2000	6,36693	2,75517	4,620	106,32	0,82	$105,46 \div 107,14$
2036	6,48408	2,77212	4,649	106,49	0,80	$105,69 \div 107,29$

La variation du plus grand âge en fonction du temps est tellement lente que le plus grand âge observé jusqu'à présent ne sera probablement surpassé que d'un an dans le prochain siècle.

Nous profitons enfin de la formule (56) pour préciser le paradoxe du dernier âge. Puisque de telles extrapolations dépassent le calcul exact, les résultats nous intéressent seulement au point de vue de l'ordre de grandeur. Nous choisissons deux tables très distinctes quant à l'âge normal et la vie normale, pour lesquelles les probabilités normales ont sensiblement la même valeur, par exemple les tables pour les Indes et l'Australie, hommes, 1901-1910. Pour notre but il est légitime de prendre $l(\xi) = 0,28$. Supposons que les deux tables puissent être reproduites par la formule de Gompertz. En réalité cette formule sied fort bien pour la table Australienne tandis que la fonction de survie théorique surpasse d'une façon systématique les observations portant sur les âges élevés des Hindous. Choisissons les nombres d'observations contenus dans la colonne 1 du tableau XVI. Alors on extrait du tableau XII les derniers âges réduits contenus dans la colonne 2. On en tire les derniers âges virtuels pour les Indes (colonne 3) et l'Australie (colonne 4) à l'aide des valeurs normales contenues dans le tableau III.

XVI. — *Le paradoxe du dernier âge.*

Nombre d'observations $Nl(\xi)$ (1)	Dernier âge réduit τ (2)	Dernier âge virtuel ω		Nombre d'années ε « observées »	
		Indes (3)	Australie (4)	Indes (5)	Australie (6)
10^3	3,490	103,59	98,23	0,001	0,002
10^4	3,908	111,46	101,11	0,01	0,024
10^5	4,218	117,73	103,43	0,1	0,244
10^6	4,528	122,95	105,35	1	2,44
10^7	4,768	127,42	107,00	10	24,4
10^8	4,927	130,39	108,15	100	244

Les variations du dernier âge en fonction du nombre d'observations sont représentées pour les deux populations, par la figure (15). Elle montre la supériorité énorme du point de vue de longévité qui existe pour la table défavorable.

Mais les nombres d'observations de la colonne (1) correspondent à des durées différentes pour les deux tables. Car la mortalité sera plus grande dans la population dont la table est défavorable. Pour fixer ce point, traitons deux populations stationnaires de même grandeur P dont l'une vit sous les conditions des Hindous, l'autre sous celles des Australiens. Pour l'une, le taux de mortalité, l'inverse de l'âge moyen au décès, est

$$1 : e(o) = 1 : 22,59$$

pour l'autre

$$1 : e(o) = 1 : 55,20$$

valeurs tirées des tables de Glover. Alors les nombres annuels des décès sont $P : e(o)$ et les nombres d'observations annuels $P l(\xi) : e(o)$. Soit

$$P = \frac{22,59}{0,28} \cdot 10^6$$

la grandeur de la population envisagée. Alors

$$Nl(\xi) = 10^6$$

est le nombre d'observations annuelles faites sur la population hindoue. On en tire les temps correspondants aux nombres d'observations (colonne 5 du tableau XVI). Pour une population de

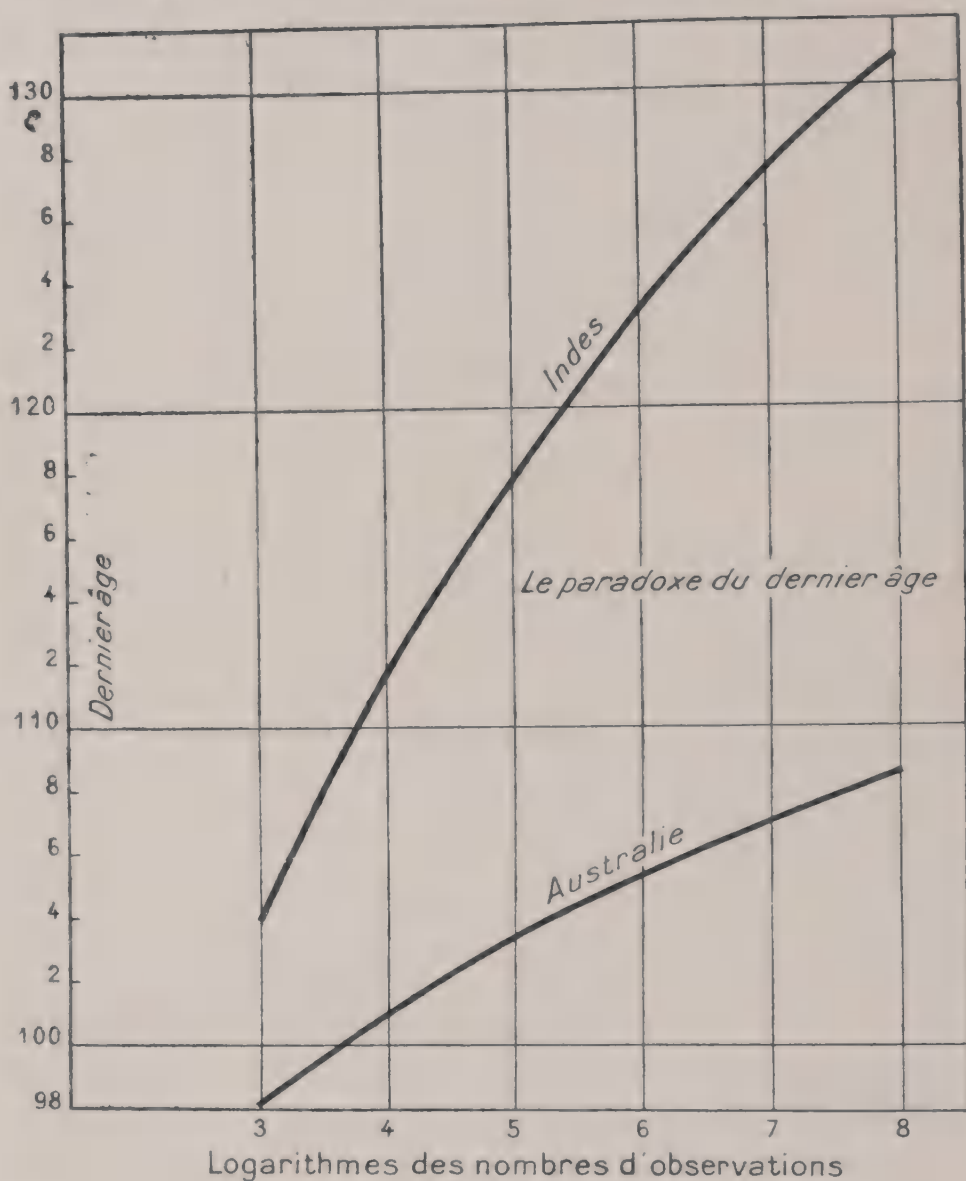


FIG. 15.

80 millions ayant le taux annuel de mortalité 44,5 0/00, et pour les durées de la colonne 5, la colonne 3 indique l'âge le plus probable du dernier survivant au moment de sa mort. La relation entre le dernier âge (colonne 3), et la durée d'observations (colonne 5) nécessaire pour que cet âge soit l'âge au moment de la mort du dernier survivant, ne vaut que du point de vue de

l'ordre de grandeur. Car l'âge au décès étant une variable statistique, il est bien possible qu'il soit observé avant ou après le temps nécessaire pour que cette valeur soit la plus probable.

Pour les Australiens le nombre d'observations annuel est

$$N(\xi) = \frac{22,6}{0,28} \cdot \frac{0,28}{55,20} \cdot 10^6 \\ = 0,41 \cdot 10^6.$$

Alors 10^6 est le nombre d'observations correspondant à 2,44 ans. Les années correspondant aux nombres d'observations de la colonne 1 sont données pour les Australiens dans la colonne 6.

En tenant compte des réserves faites à l'instant, on conclut : Pour obtenir la même grandeur du dernier âge, il faudrait des observations portant sur un intervalle d'années qui est beaucoup plus long pour les Australiens que pour les Hindous.

Pour fixer ce point, calculons le nombre d'années tel que 104 soit le dernier âge virtuel des deux populations de même grandeur. En interpolant sur les logarithmes des chiffres contenus dans les colonnes 5 et 6, on obtient pour les Hindous $\log z = -2,948$ et pour les Australiens $\log z = -0,684$. Pour le dernier âge virtuel de 107, les chiffres correspondants sont $\log z = -2,567$ et $\log z = 1,387$. Le nombre d'années tel que 104 soit le dernier âge, dans le sens envisagé, est à peu près 400 fois plus long pour la population favorable. Pour 107 ans le facteur multiplicatif s'élève même à 9.000.

Il va sans dire que ces extrapolations dépassent de beaucoup le calcul exact. Voilà pourquoi nous n'attribuons guère d'importance sur les nombres eux-mêmes. Ce qui importe, c'est de préciser la supériorité énorme, du point de vue de la longévité, des tables défavorables. Le fait que l'écart type est beaucoup plus grand pour les tables défavorables n'y change rien : le nombre nécessaire pour qu'on puisse attendre un dernier âge donné est de beaucoup moindre pour la table défavorable.

VII

CONCLUSIONS

Le problème de la durée extrême de la vie humaine semble, mais semble seulement, se trouver en dehors des conditions sur lesquelles repose la théorie des probabilités. Pourtant notre solution n'est basée que sur elle. Nous traitons la table de mortalité comme une distribution des décès selon les âges et supposons que cette distribution, illimitée, ne s'approche qu'asymptotiquement de zéro. Par conséquent le plus grand âge est une variable statistique dont nous avons construit la distribution finale, valable pour de grands nombres d'observations.

Les distributions des plus grands âges en Suède et en Suisse observés pendant les cinquante dernières années peuvent être interprétées comme distributions de la plus grande valeur d'une distribution illimitée. Cet accord permet de fixer une valeur pour la durée extrême de la vie d'une population donnée en déterminant les moyennes de la distribution finale. Pour ce calcul nous n'employons que des données se rapportant au voisinage de l'âge normal, pour lequel les observations sont nombreuses. Il faudra d'ailleurs bien distinguer entre notre théorie générale et l'application que nous en faisons en employant les formules de Lexis et de Gompertz.

Notre théorie permet de traiter le dernier âge atteint jusqu'à une certaine époque, valeur qui augmente toujours avec le temps mais d'une façon extrêmement lente. Ce résultat n'a rien à faire avec le progrès de l'hygiène, car il reste valable si nous tournons notre regard vers les temps passés. L'historique du plus grand âge en Suède peut être interprété comme l'augmentation de la plus grande valeur d'une distribution de Gompertz.

Pour une population vivant à un niveau bas, le dernier âge sera en général supérieur à celui d'une population vivant à des conditions plus favorables, pourvu qu'on étudie le même nombre d'observations, qu'il soit suffisamment grand, et que les deux tables de survie puissent être représentées par la même formule biométrique qui contiendra des constantes différentes pour les deux populations. Cela tient à un fait observé : Si l'âge normal augmente, la vie normale diminue. On en conclut que tous les renseignements sur les âges élevés des populations primitives n'appartiennent vraisemblablement pas au domaine des fables. De plus, on peut hasarder une prévision : si le progrès de l'hygiène influence la mortalité dans la même direction que par le passé, si l'espérance de vie d'un nouveau-né et l'âge normal augmentent tandis que l'espérance de vie à cet âge diminue, on ne peut pas s'attendre à un accroissement de la durée extrême de la vie humaine. La disparition totale de la mortalité infantile, but lointain de tout progrès, n'aura pas d'influence favorable sur le dernier âge.

La théorie suivant laquelle il n'y a pas de limite fixe pour la vie humaine est en accord avec les observations. La raison en est que ces cas apparemment individuels reposent sur de nombreuses observations. En ce sens nos raisonnements sont parallèles aux recherches de Bortkiewicz (4). Quand cet auteur a étudié le nombre des soldats tués par année par un cheval, il ne voulait guère augmenter nos connaissances hippiques. De même nous avons suivi le sort des Mathusalems dans le but de montrer que les valeurs extrêmes suivent bien les règles du calcul des probabilités, et qu'on peut même vérifier cela — pourvu que les observations soient bonnes et la théorie bien établie.

BIBLIOGRAPHIE

- Annuaire statistique de la Suède*. Stockholm, 1932.
- G. F. BECKER et C. F. van ORSTRAND. — *Hyperbolic functions*. Washington, Smithsonian Institution, 1909.
- L. von BORTKIEWICZ. — 1) Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der stationären und in der progressiven Bevölkerung. *Bull. de l'Institut International de Statistique*, t. XIX. La Haye, 1912.
- 2) Variationsbreite und mittlerer Fehler. *Sitzungsberichte d. Berliner Mathematischen Gesellschaft*, t. 21. Berlin, 1922.
- 3) Die Variationsbreite beim Gauss'schen Fehlergesetz. *Nordisk Statistik Tidskrift*, t. I, 1, 2. Stockholm, 1922.
- 4) Das Gesetz der kleinen Zahlen, Leipzig, 1898.
- E. L. DODD. — The greatest and the least variate under general laws of error. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 25, n° 4. New-York, 1923.
- B. DE FINETTI. — Sul compartamento assintotico della mortalità. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 58, 1934.
- R. A. FISHER et L. H. C. TIPPETT. — Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 24, Part 2, p. 180. Cambridge, 1928.
- M. DE FRANCHIS. — A proposito dello nota di Finetti e in risposta ad un libello di Insolera. *Rend. Circ. Palermo*, t. 58, 1934.
- J. W. GLOVER. — United States Life Tables 1890, 1901, 1910, 1901/10. *Washington Government Printing Office*, 1921.
- K. GOLDZIEHER. — Signifikative Konstantenbestimmung bei der Gompertz-Makeham'schen Formel. *Das Versicherungsarchiv*, t. 4, n° 1, Wien, 1933.
- Extension logistique de la formule de mortalité de Makeham. *Comptes rendus*, 203, p. 969. Paris, 1936.
- J. GROUT. — Natural and political observations upon the bills of mortality. London, 1676.
- E. J. GUMBEL. — 1) La distribuzione dei decessi secondo la legge di Gauss. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, Anno III, n° 3. Roma, 1932.
- 2) La distribution de Gauss pour les décès. *Matematitscheskij Sbornik*, t. 39, n° 3. Moscou, 1932.
- 3) Die Gauss'sche Verteilung der Gestorbenen. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Bd. 138, III. Folge Bd. 83. Jena, 1933.
- 4) Die Verteilung der Gestorbenen um das Normalalter. *Aktuarske Vedy*, t. IV, n° 2. Prague, 1933.
- 5) La signification des constantes dans la formule de Gompertz-Makeham. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 196, n° 9. Paris, 1933.
- 6) L'âge limite (Résumé). *Bulletin de la Société Mathématique*, vol. LX, fasc. 3-4. Paris, 1932.

- 7) L'età limite. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, Anno V, n° 1. Rome, 1934.
 - 8) Das Alter des Methusalem. *Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, t. 69, n° 4. Bâle, 1933.
 - 9) La distribution limite de la plus petite valeur parmi les plus grandes. *Comptes rendus*, 197, n° 20. Paris, 1933.
 - 10) Les moments des distributions finales de la première et de la dernière valeur. *Comptes rendus*, 198, p. 141. Paris, 1934.
 - 11) Les plus grands âges en Suisse. *Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, t. 70, n° 4. Bâle, 1934.
 - 12) Le paradoxe de l'âge limite. *Comptes rendus*, 199, n° 19. Paris, 1934.
 - 13) Le plus grand âge, distribution et série. *Comptes rendus*, 201, n° 5. Paris, 1935.
 - 14) Le piu alte età in Svezia. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, t. VI, n° 4. Rome, 1935.
 - 15) Les valeurs extrêmes des distributions statistiques. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, t. IV, fasc. 2. Paris, 1935.
 - 16) La table de mortalité traitée comme distribution. *Annales de l'Université de Lyon*, 3^e série A, fasc. 1. Lyon, 1936.
 - 17) La plus grande valeur. *Aktuarske Vedy*, t. V, n° 2-4. Prague, 1935-36.
 - 18) L'âge limite. *Aktuarske Vedy*, t. VI, n° 1. Prague, 1936.
 - 19) Les inondations et la théorie de la plus grande valeur. *Comptes rendus*, 203, n° 1, p. 27. Paris, 1936.
 - 20) Les distances extrêmes entre les émissions radioactives. *Comptes rendus*, 203, n° 5, p. 354. Paris, 1936.
- M. HUBER. — Le calcul des taux de mortalité aux âges élevés. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 3^e année, n° 4. La Haye, 1935.
- F. INSOLERA. — 1) Una funzione di sopravvivenza. *Giornale di Matematica Finanziaria*, vol. XII, n° 4-6. Turin, 1930.
- 2) On the oldest age. *Giornale di Matematica Finanziaria*, Série II, vol. I, n° 1. Turin, 1931.
- 3) Probabilità e sopravvivenza. *Atti dell'Istituto delle Assicurazioni*, vol. V. Roma, 1933.
- W. LEXIS. — 1) *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft*. Freiburg, 1877.
- 2) *Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik*. Jena, 1903.
- R. von MISES. — Ueber die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe. *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft*, t. 22, p. 3. Berlin, 1923.
- 2) *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*. Leipzig und Wien, 1931.
- A. DE MOIVRE. — *Treatise of annuities on lives*. London, 1724.
- J. F. STEFFENSEN. — 1) Notes on the life table and the limit of life. *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. LXII, part 1. London, 1931.
- 2) *Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science*. Cambridge University Press, 1930.
- Tables de mortalité de la population Suisse 1876-1932. Contributions à la Statistique Suisse*, fasc. 4. Berne, 1935.
- Textbook of the Institute of Actuaries*. London, 1902.
- Th. WITTSTEIN. — *Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit*. Hannover, 1881.

OUVRAGES SCIENTIFIQUES DU MÊME AUTEUR

Die Methoden der Interpolation des Bevölkerungsstandes. F. C. W. Vogel. Leipzig, 1917.

Einführung in die mathematische Philosophie. Traduction en allemand de l'ouvrage anglais de Bertrand Russell, avec préface de David Hilbert. Dreimaskenverlag. Première édition. Munich, 1923. Seconde édition. Berlin, 1930.

Das Zufallsgesetz des Sterbens. Ergänzungsheft 12 zum Deutschen Statistischen Zentralblatt. B. G. Teubner. Leipzig, 1932.

Cours de Statistique mathématique : Distributions. Publié par l'Institut de Science financière et d'Assurances, Faculté des Sciences. Lyon, 1934.

Cours de Statistique mathématique : Analyse des Aléatoires. Publié par l'Institut de Science financière et d'Assurances, Faculté des Sciences. Lyon, 1937.

TABLE DES MATIÈRES

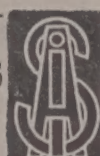
	Pages
I. Problème et méthode	3
II. Tables de mortalité	6
III. Théorie du dernier âge	20
IV. Distributions des plus grands âges en Suisse et en Suède	32
V. Formule de Lexis et observations américaines	39
VI. Formule de Gompertz et historique du plus grand âge en Suède	48
VII. Conclusions	60
Bibliographie	62





ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.



R. FABRE

Professeur de Toxicologie
à la Faculté de Pharmacie de Paris

TOXICOLOGIE ET HYGIÈNE INDUSTRIELLE

Ch. FABRY

Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences

OPTIQUE

E. FAURE-FREMIET

Professeur au Collège de France

BIOLOGIE

(Embryologie et Histogenèse)

Ch. FRAIPONT

Professeur à la Faculté des Sciences
de Liège

PALÉONTOLOGIE ET LES GRANDS PROBLÈMES DE LA BIOLOGIE GÉNÉRALE

Maurice FRECHET

Professeur à la Sorbonne

ANALYSE GÉNÉRALE

M. L. GAY

Professeur de Chimie-Physique
à la Faculté des Sciences de Montpellier

THERMODYNAMIQUE ET CHIMIE

J. HADAMARD

Membre de l'Institut

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET SES APPLICATIONS

Victor HENRI

Professeur à l'Université de Liège

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

A. F. JOFFE

Directeur de l'Institut Physico-Technique
de Leningrad

PHYSIQUE DES CORPS SOLIDES

A. JOUNIAUX

Professeur à l'Institut de Chimie de Lille

CHIMIE ANALYTIQUE (Chimie-Physique, minérale et industrielle)

P. LANGEVIN

Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

I. — RELATIVITÉ

II. — PHYSIQUE GÉNÉRALE

Louis LAPICQUE

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
**PHYSIOLOGIE GÉNÉRALE
DU SYSTÈME NERVEUX**

A. MAGNAN

Professeur au Collège de France

MORPHOLOGIE DYNAMIQUE ET MÉCANIQUE DU MOUVEMENT

Ch. MARIE

Directeur de Laboratoire
à l'Ecole des Hautes-Études
ÉLECTROCHIMIE APPLIQUÉE

Ch. MAURAIN

Membre de l'Institut
Doyen de la Faculté des Sciences
Directeur de l'Institut de Physique du Globe
PHYSIQUE DU GLOBE

André MAYER

Professeur au Collège de France

PHYSIOLOGIE

Henri MINEUR

Astronome à l'Observatoire de Paris

ASTRONOMIE STELLAIRE

Chr. MUSCELEANU

Professeur à la Faculté des Sciences
de Bucarest

PHYSIQUE GÉNÉRALE ET QUANTA

M. NICLOUX

Professeur à la Faculté de Médecine
de Strasbourg

CHIMIE ANALYTIQUE

(Chimie organique et biologique)

P. PASCAL

Correspondant de l'Institut
Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole
Centrale des Arts et Manufactures

CHIMIE

GÉNÉRALE et MINÉRALE

Ch. PÉREZ

Professeur à la Sorbonne
BIOLOGIE ZOOLOGIQUE

J. PERRIN

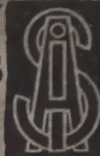
Membre de l'Institut
Prix Nobel de Physique
Professeur à la Faculté des Sciences
de Paris

ATOMISTIQUE

CATALOGUE SPÉCIAL SUR DEMANDE



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES



PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

Marcel PRENANT
Professeur à la Sorbonne
I. — BIOLOGIE ÉCOLOGIQUE
II. — LEÇONS DE ZOOLOGIE

A. REY
Professeur à la Sorbonne
HISTOIRE DES SCIENCES

Y. ROCARD
Maître de Recherches
THÉORIES MÉCANIQUES
(Hydrodynamique-Acoustique)

R. SOUÈGES
Chef de Travaux
à la Faculté de Pharmacie
EMBRYOLOGIE
ET MORPHOLOGIE VÉGÉTALES

TAKAGI
Professeur à l'Université Impériale de Tokyo
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TAMIYA-(HIROSHI)
Membre du Tokugawa Biologisches
Institut-Tokyo
BIOLOGIE (Physiologie cellulaire)

A. TCHITCHIBABINE
Membre de l'Académie des Sciences
de l'U. R. S. S.

CHIMIE ORGANIQUE
(Série hétérocyclique)

Georges TEISSIER
Sous-directeur de la Station
Biologique de Roscoff
BIOMÉTRIE
ET STATISTIQUE BIOLOGIQUE

G. URBAIN
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences
de Paris

THÉORIES CHIMIQUES
Pierre URBAIN
Maître de Conférences à l'Institut
d'Hydrologie et de Climatologie
de Paris

GÉOCHIMIE
Y. VERLAINE
Professeur à l'Université
de Liège

PSYCHOLOGIE ANIMALE

P. WEISS
Membre de l'Institut
Directeur de l'Institut de Physique
de l'Université de Strasbourg

MAGNÉTISME
R. WURMSER
Directeur du Laboratoire
de Biophysique
de l'Ecole des Hautes-Etudes
BIOPHYSIQUE

Actualités Scientifiques et Industrielles

Série 1937 (suite) :

479. AUGUSTIN SESMAT. Le problème	12 fr.
480. AUGUSTIN SESMAT. L'ancienne astronomie d'Eudoxe à Descartes	15 fr.
481. AUGUSTIN SESMAT. Mécanique newtonienne et gravitation	20 fr.
482. AUGUSTIN SESMAT. Le système absolu de la mécanique	8 fr.
483. AUGUSTIN SESMAT. L'optique des corps au repos	18 fr.
484. AUGUSTIN SESMAT. L'optique des corps en mouvement	20 fr.
485. AUGUSTIN SESMAT. L'esprit de la science classique	12 fr.
486. AUGUSTIN SESMAT. Genèse des théories de la relativité	10 fr.
487. AUGUSTIN SESMAT. Principes de la théorie restreinte	12 fr.
488. AUGUSTIN SESMAT. Les systèmes privilégiés de la théorie restreinte	12 fr.
489. AUGUSTIN SESMAT. Principes de la théorie générale	12 fr.
490. AUGUSTIN SESMAT. Théorie relativiste de la gravitation	15 fr.
491. AUGUSTIN SESMAT. Les systèmes privilégiés de la théorie générale	5 fr.
492. AUGUSTIN SESMAT. Essai critique sur la doctrine relativiste	10 fr.
493. RENÉ LAMBERT. Structure générale des monogrammes et des systèmes nomographiques	15 fr.
494. D. WEINBERG. Unification des méthodes de mesure en biométrie différen- tielle. Le tétronaque : échelle en quarts de sigma	15 fr.
495. E. SCHREIDER. Les types humains. Première partie : Les types somatiques	20 fr.
496. E. SCHREIDER. Les types humains. Deuxième partie : Les types psychologiques	18 fr.
497. E. SCHREIDER. Les types humains. Troisième partie : Les types somato- psychiques	20 fr.
498. D. F. POULSON. The embryonic development of drosophila melanogaster by	15 fr.
499. P. URBAIN. Introduction à l'étude pétrographique et géochimique des roches argileuses. — I. Méthodes chimiques. — II. Méthodes microscopiques	15 fr.

Liste complète à la fin du volume.